

## 進化手法による最適ネットワークの生成と構造特性

著者	山本 聡彦
発行年	2014
学位授与大学	筑波大学 (University of Tsukuba)
学位授与年度	2013
報告番号	12102甲第6875号
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2241/00123467">http://hdl.handle.net/2241/00123467</a>

# 進化手法による最適ネットワークの生成と 構造特性

山本 聡彦

システム情報工学研究科

筑波大学

2014年3月

## 研究成果の概要

要素間の相互作用によって起こる創発現象の問題として扱うべき重要な対象の一つとなりうるものとして、コンセンサス、同期問題があり、特性を見ていく上で複雑ネットワークと深い関連がある。近年における複雑系科学において、様々な分野における複雑なネットワークの繋がりに関連が見い出され、複雑ネットワーク科学として、その研究が盛んに行われている。様々な分野における複雑ネットワーク構造を考慮した研究が進められているが、目的特性に合った最適なネットワークとは何かといった従来ネットワークに捉われない命題の研究は、未だ解明されていない点が多くある分野である。従来ネットワークの作成方法として、次数を中心とした優先的選択、規則的な付加やランダムリワイヤリング等、ある規則的なルールを下にネットワークを作成し、その特性をみていくものが多い。ある規則的なルールを定めてネットワークを作成し、作成されたネットワークの特性を解析していき、ネットワークモデルを考案するという流れに基づく研究は世界中に数多く存在しており、これまでの複雑ネットワーク研究でよく行われている。しかし、目的特性を予め掲げ、それに最も適したネットワーク構造とは何かという視点による研究は、相対的に数が少なくなる。本研究においては、目的特性に合う最適なネットワークとは何かといった命題に基づき、その生成設計と構造の意味を考える。ネットワークに遺伝的アルゴリズムを適用し、進化させることで最適なネットワークを設計する。

目的特性としてコンセンサス、同期問題を考え、リンクコストの考慮を行いながら、優れた最適ネットワーク構造の生成設計を本研究では行う。ラプラシアン行列の固有値特性に基づく進化手法によるネットワークの最適化が、コンセンサス、同期問題に対して従来優れたネットワークモデルよりも優れたものを生成し、より代数的連結性が高く、収束性に優れたネットワークとなることを示す。そして各種ネットワークにおける固有値の推移や分布から、これらの特性の解析を行い、従来ネットワークモデル及び最適ネットワーク構造の意味について深く探求する。そして推移確率行列、正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて、リンクの重みを考慮した最適ネットワークも生成設計する。また、コンセンサス、同期問題に適さない最適ネットワークの生成設計も行い、ネットワーク構造の特性解析を行う。また、別の目的特性の研究として、情報伝達、伝播拡散において最適な特性をもつネットワークを生成設計する。適応関数としては、情報伝達、伝播拡散の特性と関連するネットワークの隣接行列の最大固有値とリンクコストを考慮し、最適なネットワークを進化生成させる。

様々な諸問題と関連するコンセンサス、同期問題、情報伝達、伝播拡散に対する最適なネットワーク設計の構造モデルとして、本研究における提案ネットワークの意義と有効性を示す。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	研究の背景 . . . . .	1
1.2	研究の目的 . . . . .	2
1.3	本論文の構成 . . . . .	3
<b>第2章</b>	<b>複雑ネットワークと関連研究</b>	<b>5</b>
2.1	複雑ネットワーク科学とネットワークの概念 . . . . .	5
2.1.1	複雑ネットワーク科学とは . . . . .	5
2.1.2	グラフ理論とネットワークにおける定義 . . . . .	6
2.2	従来研究におけるネットワークモデルとその構造 . . . . .	9
2.2.1	レギュラーネットワーク . . . . .	9
2.2.2	ランダムネットワーク . . . . .	10
2.2.3	スモールワールドネットワーク . . . . .	11
2.2.4	スケールフリーネットワーク . . . . .	13
2.2.5	ランダムレギュラーネットワーク . . . . .	16
<b>第3章</b>	<b>コンセンサス, 同期問題</b>	<b>17</b>
3.1	コンセンサス, 同期問題とは . . . . .	17
3.2	ラプラシアン行列の性質 . . . . .	18
3.2.1	ラプラシアン行列 . . . . .	18
3.2.2	ラプラシアン行列と固有値特性 . . . . .	20
3.3	コンセンサス問題の収束性 . . . . .	21
3.4	ラプラシアン行列とエージェントの合意 . . . . .	25
3.5	コンセンサス, 同期のダイナミクス . . . . .	26
3.6	離散時間におけるコンセンサス過程 . . . . .	28
3.7	推移確率行列と正規化ラプラシアン行列 . . . . .	28
<b>第4章</b>	<b>進化的アルゴリズムのネットワーク生成への適用</b>	<b>31</b>
4.1	進化的アルゴリズム . . . . .	31
4.2	遺伝的アルゴリズム . . . . .	32
4.3	世代交代モデル Minimal Generation Gap(MGG) . . . . .	36

4.4	ネットワークと設計設定	37
4.4.1	ネットワークと隣接行列	37
4.4.2	初期ネットワーク	38
4.5	進化的アルゴリズムのネットワーク生成への適用	38
<b>第5章</b>	<b>最適ネットワークの生成設計</b>	<b>41</b>
5.1	適応関数の定義	41
5.1.1	リンク密度	41
5.1.2	重み付き評価適応関数の設定	42
5.2	生成された最適ネットワーク	43
5.2.1	従来ネットワークモデル	43
5.2.2	生成された最適ネットワークと従来ネットワークとの比較	46
5.2.3	固有値分布によるスペクトル解析	51
<b>第6章</b>	<b>最適ネットワークとコンセンサス問題の収束性解析</b>	<b>56</b>
6.1	コンセンサス問題の収束性比較	56
6.2	従来ネットワークモデル上での収束性	57
6.3	最適ネットワークの収束性	60
6.4	ネットワーク規模によるコンセンサスへの影響	68
6.5	推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク	71
6.5.1	推移確率行列によるネットワーク特性	71
6.5.2	推移確率行列による最適ネットワークの生成設計	73
6.5.3	推移確率行列の固有値分布によるスペクトル解析	77
6.5.4	正規化ラプラシアン行列によるネットワーク特性	82
6.5.5	正規化ラプラシアン行列による最適ネットワークの生成設計	83
6.5.6	正規化ラプラシアン行列の固有値分布によるスペクトル解析	87
6.6	合意形成に適さないネットワークの生成設計	92
6.6.1	合意形成に適さないネットワークの適応関数	92
6.6.2	木構造の最適ネットワーク	92
6.6.3	推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク	96
6.6.4	ロリポップ形状の最適ネットワーク	98
6.6.5	推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク	100
6.7	代数的連結性のみの最適化による完全連結ネットワーク	104
6.8	進化手法によるコンセンサス、同期問題における最適ネットワーク生成のまとめ	114

<b>第7章</b>	<b>情報伝達, 伝播拡散</b>	<b>115</b>
7.1	情報伝達, 伝播拡散とネットワーク特性 . . . . .	115
7.2	ネットワーク上での情報伝達, 伝播拡散プロセスと隣接行列の最大固有値 . .	117
<b>第8章</b>	<b>情報伝達, 伝播拡散の最適ネットワークの生成設計</b>	<b>121</b>
8.1	適応関数の定義 . . . . .	121
8.1.1	隣接行列の固有値 . . . . .	121
8.1.2	重み付き評価関数の設定 . . . . .	122
8.2	最適ネットワークの生成設計 . . . . .	123
8.2.1	初期ネットワーク . . . . .	123
8.2.2	情報伝達, 伝播拡散の最小化 . . . . .	123
8.2.3	情報伝達, 伝播拡散の最大化 . . . . .	125
8.3	最適ネットワークの特性解析 . . . . .	127
8.3.1	情報伝達, 伝播拡散の最適化ネットワークの次数分布 . . . . .	127
8.3.2	情報伝達, 伝播拡散の最適化ネットワークの固有値特性による解析 .	128
8.3.3	隣接行列の固有値分布によるスペクトル解析 . . . . .	131
8.3.4	隣接行列の固有値による木構造の最適ネットワーク . . . . .	136
8.4	最適ネットワークと従来ネットワークモデルの情報伝達, 伝播拡散特性 . . .	138
8.5	進化手法による情報伝達, 伝播拡散の最適ネットワークの生成設計のまとめ .	141
<b>第9章</b>	<b>おわりに</b>	<b>142</b>
9.1	本研究から得られた結論 . . . . .	142
9.1.1	コンセンサス, 同期問題における最適ネットワークの生成設計 . . . .	142
9.1.2	リンクの重みを考慮した最適ネットワークの生成設計 . . . . .	142
9.1.3	情報伝達, 伝播拡散の最適ネットワークの生成設計 . . . . .	143
9.2	本研究の工学的意義 . . . . .	143
9.3	今後の課題 . . . . .	145
9.3.1	ネットワークにおける特性の解析と応用 . . . . .	145
9.3.2	他の問題特性における最適ネットワークの生成設計 . . . . .	145
	<b>謝辞</b>	<b>146</b>
	<b>参考文献</b>	<b>156</b>
	<b>研究成果</b>	<b>157</b>

# 第1章 はじめに

## 1.1 研究の背景

自然界における動物の群れ行動や鳴き声等の集団行動や同期現象，社会における意見の合意，多数のエージェントの協調制御問題は，要素間の相互作用によって起こる創発現象の問題として扱うべき重要な対象の一つとなりうるものである．これらの問題はコンセンサス問題として扱うことができ，特性を見ていく上で複雑ネットワークと深い関連がある．近年における複雑系科学において，スモールワールドネットワーク<sup>1)</sup>，スケールフリーネットワーク<sup>2)</sup>の発見をブレイクスルーの中心として，様々な分野における複雑なネットワークの繋がりとの関連が見い出され，複雑ネットワーク科学として，その研究が世界中の様々な分野において盛んに行われている．感染症，同期現象，噂の広まり方，普及現象，自然界における生命体の構造や集団運動，物理学的視点，マルチエージェント，ゲーム理論といった様々な分野における複雑ネットワーク構造を考慮した研究が進められているが，目的特性に合った最適なネットワークとは何かといった従来ネットワークに捉われない命題の研究は，未だ解明されていない点が多くある分野である．ランダムネットワーク<sup>3)</sup>，スモールワールド<sup>1)</sup>，スケールフリー<sup>4)</sup>等の従来ネットワークの作成方法として，次数を中心とした優先的選択，規則的な付加やランダムリワイヤリング等，ある規則的なルールを下にネットワークを作成し，その特性をみていくものが多い．ある規則的なルールを定めてネットワークを作成し，作成されたネットワークの特性を解析していき，ネットワークモデルを考案するという流れに基づく研究は世界中に数多く存在し，一つの潮流となっている．しかし，目的特性を予め掲げ，それに最も適したネットワーク構造とは何かという視点による研究は，相対的に数が少なくなる．本研究においては，目的特性に合う最適なネットワークとは何かといった命題に基づき，その生成設計と構造の意味を考える．ネットワークを隣接行列によってコード化し，遺伝的アルゴリズムを適用し，ネットワークを進化させることで最適なネットワークを生成設計する方法を行う．本研究においては，従来研究の規則的なルールに基づいたネットワーク作成とは異なる，進化的アルゴリズムにより目的特性に合うよう進化させることで最適なネットワークを生成させる．それにより目的特性に合った最適なネットワークを生成設計し，従来研究では得られなかった新たなネットワーク構造モデルを提案する．

目的特性の対象としては，複雑ネットワークにおける重要な研究対象であるコンセンサス，同期問題，情報伝達，伝播拡散を考える．コンセンサス，同期問題は，自然界における集団

行動や自然現象，人間社会特性，物理学的視点においても重要なアプローチ視点となっている．情報散布問題，分散制御問題として扱われているものもあり，効率的なセンサネットワーク構築や多数のコンピュータネットワーク構築においても，重要なものである．そして多数のエージェントによるロボット，センサーや粒子等を制御するための問題としても工学的に様々な有効性あるものとして用いられている．

コンセンサス，同期問題は生命体における構造や行動から自然現象，社会特性，ネットワーク管理，工学的応用に至るまで多様な問題と関連しており，その最適なネットワーク構造を求めることは大きな意義がある．

情報伝達，伝播拡散に関するネットワークの研究も，これまで世界中で多くの研究がなされている．情報通信ネットワークの分野，生命体の構造，浸透や自然現象，社会特性，流通や経済等に至るまで様々なネットワーク構造と関係がある．情報伝達，伝播拡散も多様な問題と関連しており，その最適なネットワーク構造を求めることは大きな意義がある．

## 1.2 研究の目的

本研究の目的の一つは，コンセンサス，同期問題への適用を考えた最適な特性をもつネットワークを生成設計することであり，進化的手法を用いて，最適なネットワークを設計する方法を提案する．ラプラシアン行列の固有値がコンセンサス，同期問題において重要な役割をもつという特性があり<sup>5-7)</sup>，それに基づいてリンクコストの最小化の制約を加えながら，最も同期問題に対して優れたネットワークを進化生成させ，その構造を明らかにする．最適化のための適応関数としては，コンセンサス，同期問題に関する指標であるネットワークのラプラシアン行列の第2最小固有値，最大固有値を考え，固有値の特性最適化とネットワーク生成コストの最小化を目指して最適なネットワークを進化生成させる．それにより，コンセンサス，同期問題に対して適したネットワークと目的に適さないネットワークを進化生成させる．

そしてリンク密度と推移確率行列，正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて，リンクの重みを考慮したネットワークを考え，進化手法により最適ネットワークを生成設計する．その固有値特性による解析から，これらの推移確率行列，正規化ラプラシアン行列における進化手法により生成設計された重み付きにおける最適ネットワークも従来有効ネットワークモデルよりも優れた特性をもつことを示す．また，重み付きにおけるネットワークにおいて，コンセンサス，同期問題において適さない最適ネットワークの生成設計も行う．

また，情報伝達，伝播拡散において最適な特性をもつネットワークを生成設計する．情報伝達，伝播拡散ネットワークにおいて，隣接行列の最大固有値が重要な役割をもつという特性があり<sup>8,9)</sup>，それに基づいてリンクの考慮を行いながら，情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークを進化生成させ，その構造を明らかにする．最適化のための適応関数としては，情



報伝達、伝播拡散の指標であるネットワークの隣接行列の最大固有値とリンク密度の2つの組合せを考え、ネットワークの隣接行列の最大固有値の最大化、最小化とネットワーク生成コストの最小化を目指して最適なネットワークを進化生成させる。それにより、情報伝達、伝播拡散の優れたネットワークとそれに適さないネットワークを進化生成させる。

そして、生成設計したこれらの最適なネットワークを従来ネットワークモデルを含めて、その構造の特性解析と考察を深く行っていく。

## 1.3 本論文の構成

本論文における構成は、以下の各章により成り立っている。

1章では、本研究の背景及び目的について述べた。

2章では、本研究において重要な対象となる複雑ネットワークの概論と従来研究において中心的になされているものを説明し、ネットワーク構造が絡む様々な諸現象を説明するアプローチとして、複雑ネットワーク科学としての視点が重要なものであることを述べる。

3章では、複雑ネットワークにおける重要な研究対象の一つでもあり、本研究で探究していくコンセンサス、同期問題について述べる。

4章では、最適化を行うための進化的アルゴリズムについての説明を行い、本研究において用いる遺伝的アルゴリズムのモデルについての仕組みを述べる。そして最適ネットワークを生成設計するために進化的アルゴリズムをネットワークへ適用する方法について述べる。

5章では、最適ネットワークの生成設計において、コンセンサス、同期問題と深く関連するラプラシアン行列の固有値を用いた進化手法による最適化を行うための評価関数について説明する。そして、得られた最適ネットワークを従来有効ネットワークモデルと比較、解析を行う。

6章では、進化手法により生成された最適ネットワークのコンセンサスの収束性を比較し、その理論的な固有値特性と収束性がどれだけ優れているかを解析する。また、リンク密度と推移確率行列、正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて、進化手法により最適ネットワークを生成設計する。その固有値特性による解析から、これらの推移確率行列、正規化ラプラシアン行列における進化手法により生成設計された最適ネットワークも従来有効ネットワークモデルよりも優れた特性をもつことを示す。また、コンセンサス、同期問題に適さない最適ネットワークの生成設計も行う。そして従来ネットワークモデルを含めて、生成設計されたネットワーク構造の特性解析を行う。

7章では、複雑ネットワークにおける重要な研究対象の一つでもあり、本研究で探究していく情報伝達、伝播拡散について述べる。

8章では、情報伝達、伝播拡散において最適な特性をもつネットワークを生成設計する。情報伝達、伝播拡散ネットワークにおいて、隣接行列の最大固有値が重要な役割をもつとい

う特性があり，それに基づいてリンクの考慮を行いながら，情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークを進化生成させ，その構造を明らかにする．最適化のための適応関数としては，情報伝達，伝播拡散の指標であるネットワークの隣接行列の最大固有値とリンク密度の2つの組合せを考え，ネットワークの隣接行列の最大固有値の最大化，最小化とネットワーク生成コストの最小化を目指して最適なネットワークを進化生成させる．それにより，情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークとそれに適さないネットワークを進化生成させる．そして従来ネットワークモデルを含めて，生成設計されたネットワーク構造の特性解析を行う．

最後の9章では，本研究の成果を総括する．そして今後の課題について述べる．

## 第2章 複雑ネットワークと関連研究

本章では、本研究において重要な対象となる複雑ネットワークの基礎的概論と従来研究において中心的になされているものを説明する。そして、本研究において用いるネットワークとしての用語や指標についても共に示し、議論考察上において必要な定義について述べる。これらの性質は最適なネットワークを進化手法により生成設計する研究を探究していく上でも共通して関連する普遍的な性質を包含するものであり、ネットワーク構造が絡む様々な諸現象を説明するアプローチとして複雑ネットワーク科学としての視点が重要なものであることを示す。

### 2.1 複雑ネットワーク科学とネットワークの概念

はじめに、本研究で対象とする複雑ネットワーク科学としての基本的な性質や、扱うネットワークとしての基礎的概念から説明及びその定義を述べる。

#### 2.1.1 複雑ネットワーク科学とは

複雑ネットワークとは複雑系科学の対象として存在する分野であり、現実世界における様々な要素因子の相互作用によって生起する複雑な事象を捉える上で、重要なアプローチ視点の一つとして、近年世界中で盛んに研究が行われている分野である。単純に複雑な事象を扱うと仮定するだけでは、物事に共通して存在する真理を捉える科学思考の興味深さを知るという点で、複雑ネットワーク科学は、ここまでパラダイムとしての注目を集めていなかった分野である。1959年に複雑ネットワーク科学として意義の大きいモデルであるランダムネットワークモデル<sup>3)</sup>が、数学者である Erdős, P. と Rényi, A. によって提案されているが、それ以降目覚ましい飛躍的進展は長い間起こらなかった。1998年に Watts, D. J. と Strogatz, S. H. によって発見されたスモールワールドネットワークモデル<sup>1)</sup>によって、数学モデルとしては極めて単純なアルゴリズムによって現実の世界を記述する特性をもち、Barabási, A. L. と Albert, R. によるスケールフリーネットワークモデル<sup>2)</sup>と併せてこれらのモデルが様々な現実世界の特性との関連が見出され、非常な注目を浴びるものとなり、世界中で盛んに研究されるブレイクスルーへと繋がった。純粋数学的な理論から、生態系、自然現象、身近な人間関係から社会科学に至るまで、現実世界に存在するネットワークは広範多岐に亘り、小さな

ものから巨大で多種多様な複雑な構造をも包含している<sup>10,11)</sup>。その複雑且つ要素因子の相互作用からなる単純には記述しえない構造から、一定の共通する性質を見出すことは、この現実世界を捉えること及び様々な応用へと繋げる上での有効性と科学思考モデルとしての高度性を有するものである。

現実世界の様々な現象を捉えるアプローチ視点として、複雑ネットワークの研究は短期間の時間で世界中で急速に研究が進められており、分野横断的な特性もそなえ、学術研究としての相互作用による影響も大きくなっている<sup>12-14)</sup>。複雑ネットワーク科学は、多様な問題と関連する広範な分野において、今後益々その手法役割、視点の重要性とモデルとしての普遍性が高まっていくと考えられる<sup>15-17)</sup>。このようなことからネットワーク構造が絡む様々な諸現象を解明するアプローチとして複雑ネットワーク科学としての視点が重要なものであり、本研究の対象が複雑ネットワークの視点を基に進めている上で、その有効性の広さと意義を示しうるものである。

### 2.1.2 グラフ理論とネットワークにおける定義

グラフ理論は、18世紀に Leonhard Euler によって考案された数理モデルであり、様々な計算機科学におけるアルゴリズムやコンピュータデータ構造管理等広く用いられている。ネットワークは、グラフ理論を用いて表現することができ、複雑ネットワークを捉える上でも密接に関連した不可分なものである。

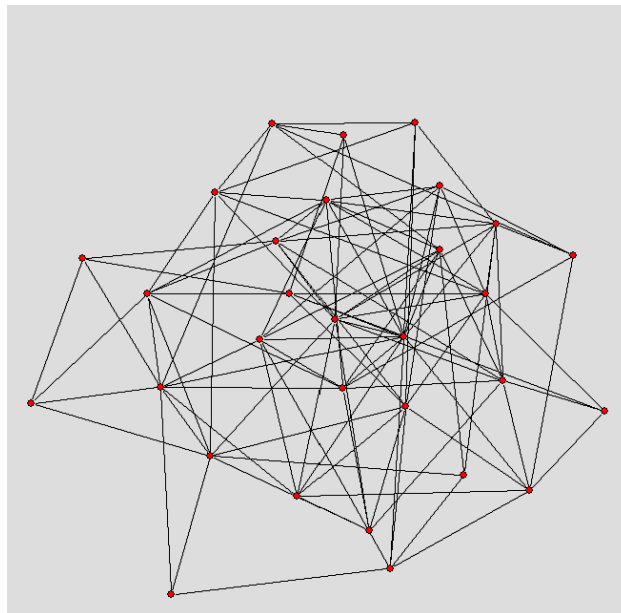


Fig. 2.1: 無向グラフ

まず、グラフ理論における基本的な性質、定義について述べ、ネットワークを表現する意味を示していく。グラフ(グラフの形、グラフトポロジー)は無向、有向グラフの2つに分け

られる.

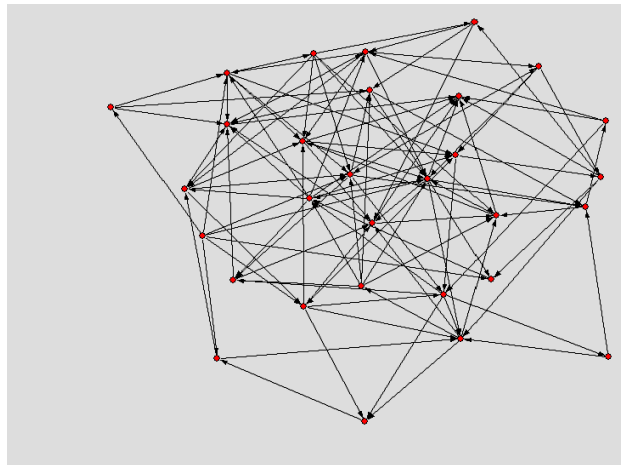


Fig. 2.2: 有向グラフ

## ネットワークの用語定義

- 無向ネットワーク

無向ネットワークにおけるグラフ  $G(V, E)$  は、頂点(ノード)の部分集合  $V$  と辺(ライン, リンク)の部分集合  $E$  による2つの集合から構成される。頂点の部分集合からなるものをユニット (Unit), ラインの部分集合からなるものをユニット間の関係 (Relations) と定義される。辺(ライン, リンク)  $e \in E$  は、頂点  $v_i, v_j \in V$  の非順序対で、 $(v_i, v_j)$  として表わされる。辺の両端の点を端点といい、端点は辺に接合しているという。頂点  $v_i$  と  $v_j$  の間に辺があるとき(辺と辺がある頂点を共有しているとき)、 $v_i$  と  $v_j$  は隣接(辺同士は隣接)しているといい、 $v_i$  との間に辺を持つ全ての頂点を  $v_i$  の隣接点という。無向グラフの例を Fig. 2.1 に示す。

- 有向ネットワーク

有向ネットワークにおけるグラフ  $G(V, E)$  は、無向ネットワークと同様に頂点(ノード)の部分集合  $V$  と辺(ライン, リンク)の部分集合  $E$  による2つの集合から構成される。辺(ライン, リンク)  $e \in E$  は、頂点  $v_i, v_j \in V$  の順序対で、頂点  $v_i$  から  $v_j$  の間に辺があるとき、 $v_j$  は  $v_i$  と隣接している定義される。有向グラフの例を Fig. 2.2 に示す。

- 連結

無向ネットワークグラフにおいて、どの頂点  $v$  からでも、それ以外の各頂点への経路が存在するとき、ネットワークの状態は連結であるとされる。そのような特性をもつネットワークを連結グラフと呼ぶ。有向ネットワークグラフにおいては、そのネットワークを無向ネットワークとして対応させたグラフが連結ならば、連結であると定められる。

- 非連結

ネットワークが連結状態を満たさないとき、そのネットワークは非連結であるとされる。

- 強連結

有向ネットワークグラフにおいて、頂点  $v_i$  と頂点  $v_j$  との間に、 $v_i$  から  $v_j$  への辺と  $v_j$  から  $v_i$  への辺が共に存在する (経路が存在) とき、 $v_i$  と  $v_j$  は強連結であると定められる。

- 弱連結

有向ネットワークグラフにおいて  $v_i$  と  $v_j$  との間に辺が存在し、 $v_i$  と  $v_j$  が強連結でないとき、 $v_i$  と  $v_j$  は弱連結であると定められる。

- 次数

無向ネットワークグラフにおいて、頂点  $v$  と接続する辺の数を頂点  $v$  の次数とされ、 $d(v)$  を頂点  $v$  の次数としておく。有向ネットワークグラフにおいて、頂点  $v$  に入ってくる辺の数を頂点  $v$  の入次数、頂点  $v$  から出て行く辺の数を頂点  $v$  の出次数と定め、 $d(v)$  は入次数と出次数の合計となる。

- 距離

ネットワークグラフにおいて、2 頂点  $v_i, v_j$  で、いくつかのリンクを経由していけば2 頂点間を結べるかを考えた最短経路としたものを  $v_i, v_j$  の距離  $d_{ij}$  と定める。

- 直径

ネットワークグラフにおける、任意の2 頂点間で最大の距離をネットワークグラフの直径と定める。

## 2.2 従来研究におけるネットワークモデルとその構造

従来研究でなされている複雑ネットワークとして代表的なネットワークモデルを示す。これらのネットワークモデルは、本研究においても大きく関連するモデルである。

### 2.2.1 レギュラーネットワーク

始めに規則的なネットワークモデルとしてのレギュラーネットワーク (正規格子ネットワーク) を挙げる。近傍の頂点ノードのみによってリンクが張られた全ノードの次数が同じネットワークモデルである。まず頂点  $N$  個をそれぞれのノードが環状に繋がれた格子状態である規則的なネットワークを作成する。  $k$  を偶数として各ノードは両隣  $k/2$  ずつのノードとリンクを繋ぎ、各ノードに  $k$  ずつリンクを張る。

レギュラーネットワークの例として Fig. 2.3 にその図を示す。

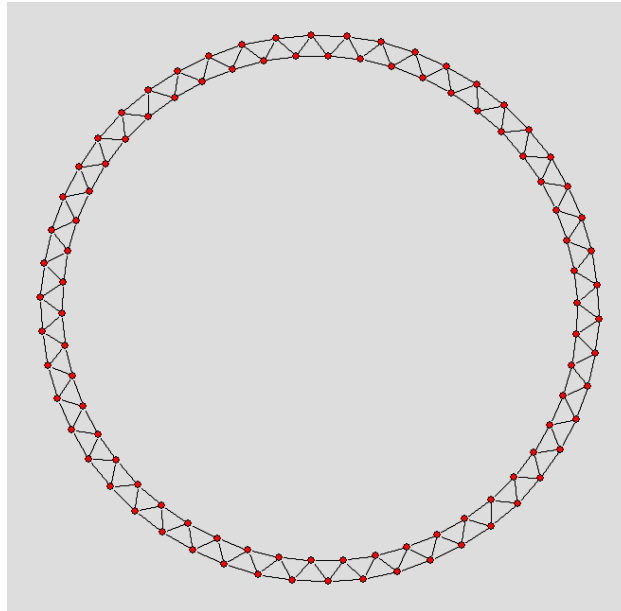


Fig. 2.3: レギュラーネットワーク

## 2.2.2 ランダムネットワーク

複雑ネットワークやグラフ理論において、開拓的に重要なモデルとなったのは、数学者である Erdős, P. と Rényi, A. によって 1959 年に提案されたランダムネットワーク<sup>3)</sup>(ランダムグラフ, ER モデル)である。ネットワークのノードがもつリンクの数は、典型的な値が存在し、大多数はその値を中心として大きくは離れないという前提により、一定の分布に従ってネットワークを作成した。それによりネットワークグラフの解析的な扱いを大きく進展させた。

ランダムネットワークは、ノード集合  $V$  の  $n$  頂点のグラフ全体の集合をリンク確率  $p$  を用いて、確率手法によりネットワークを一定の分布に従わせて作成されたものである。それらはグラフ  $G(n, p)$  として以下のように記述できる。

$G(n, p)$  のネットワークグラフは、ノード数を  $n$  とし、確率  $p(0 < p < 1)$  でリンクが張られる。ノード間において確率  $p$  でリンクが張られ、確率  $1 - p$  でリンクが張られないこととなる。ネットワーク  $G(n, p)$  における次数分布  $P(k)$  は、平均値である  $\langle k \rangle = p(n - 1)$  を持つ二項分布

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (2.1)$$

となる。そして、 $n \rightarrow \infty$  のとき、これらの分布は

$$P(k) \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.2)$$

となり、ポアソン分布に従うことになる。ここで  $\lambda = \langle k \rangle = p(n - 1)$  である。

ランダムネットワークの例として Fig. 2.4 にその図を示す。

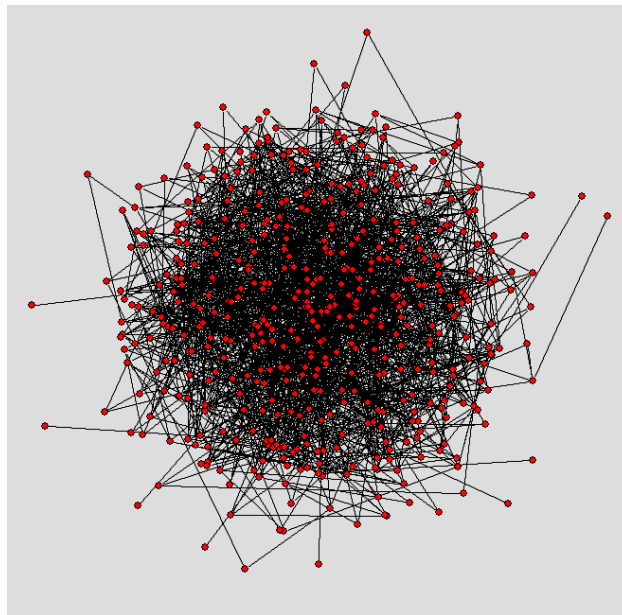


Fig. 2.4: ランダムネットワーク



### 2.2.3 スモールワールドネットワーク

スモールワールドネットワークモデル<sup>1)</sup>は1998年に Watts, D. J. と Strogatz, S. H. によって提案された複雑ネットワーク科学の研究が大きく注目されるに至った発端となるモデルである。そのモデルと関連した研究として、Granovetter による人間社会における繋がり人間関係は、常に接している親しい人々との関係と比して、普段は疎遠にしている人々との関係が、情報収集に優れているという弱い紐帯理論<sup>18)</sup>がある。Milgram による手紙の郵送による実験<sup>19)</sup>により、人間社会ネットワークにおいて、人間関係の経路は、6人程度という6次の隔たりとして象徴される構造が存在することが分かり、インターネット上の実験<sup>20)</sup>の成果からも、人間関係の社会特性におけるスモールワールドの存在は検証されている。

複雑系科学には、様々な事象を自己組織化構造として捉えようとする研究が存在する<sup>21-24)</sup>。自己組織化(Self-organization)とは、他の要素からの制御によらず、自身で構造や組織を作成していく性質のことを意味する。自己組織化現象をみていくと、コオロギの鳴き声の同期化現象<sup>25)</sup> 多数の蛍による発光同期現象<sup>26)</sup> や心筋細胞活動<sup>27,28)</sup> 等の同調現象がある。人間集団における拍手<sup>29,30)</sup> , 欠伸<sup>31-33)</sup> の同調行動や自動車の交通流におけるクラスタ現象<sup>34,35)</sup> 等の動物だけでなく人間の社会特性としてみられるものも存在する。このような特性は、ネットワークにおいても重要な性質として関わってくるものと考えられる。

コオロギの鳴き声の同期化現象を研究していた Watts らは、スモールワールドネットワーク<sup>1)</sup>の提案によって、それらの生命体の構造から現実世界の様々な現象<sup>25)</sup>をネットワークの繋がり科学によって解明しようと試みている。スモールワールドネットワークの特性が生物行動、自然現象、人工的なネットワーク(神経系や送電網)、人間関係の社会的ネットワーク等に関連した特性があることを Watts らが発見し、Granovetter の弱い紐帯理論もスモールワールドネットワークによって記述できることを示した。規則的な格子であるレギュラーネットワークを始めに考え、そこに僅かなランダムなリンクを導入したところ、スモールワールドネットワークとしての性質が発現することを発見した。

Watts ら<sup>1)</sup>のスモールワールドネットワークモデル(WSモデル)は、 $\beta$ -Graph と呼ばれるものであり<sup>36)</sup>、Fig. 2.5 にその概念図を示す。

$\beta$ -Graph の構成方法は、レギュラーネットワークをまず作成し、確率  $p$  でランダムにノードを選びリンクの張り替えを行う(ランダムリワイヤリング)。スモールワールドネットワークはランダムに選んだノードとの確率  $p$  によるリンク張り替えで、 $p=0$  のときはリンクの張り替えを全く行わず、もとのレギュラーネットワークのままであり、 $0 \leq p \leq 1$  において、近傍を繋ぐリンクによりクラスタリング係数  $C$  の値がおおきいままで、張り替えられたリンクがショートカットの役割をすることにより、平均距離  $L$  の値が急激に小さいスモールワールドとなる。 $p=1$  においてはリンクを全て張り替えることになり、作成されるものはランダムネットワーク<sup>3)</sup>となる。

ここでクラスタリング係数  $C$  及び平均距離  $L$  の定義を示す。

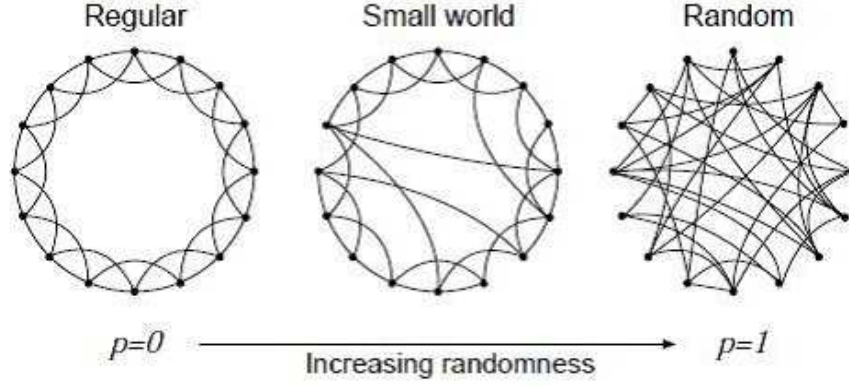


Fig. 2.5:  $\beta$ -Graph Small World

クラスタリング係数  $C$  は、ある頂点  $v$  の近傍ノードについて隣接する頂点数を  $v_i$  とし、近傍ノードの集合のノード同士が近傍となる割合を考える。すなわち

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{v_i}{2}} = \frac{2E_i}{v_i(v_i - 1)} \quad (2.3)$$

この  $v_i$  個のノード間におけるリンク数を  $\binom{v_i}{2}$  で除算し、全ノードにおける平均を取る。よって、クラスタリング係数  $C$  は、次式のようになる。

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.4)$$

平均距離  $L$  は、連結グラフ内の全てのノード対の頂点の組合せにおいて、2 頂点間の距離の平均である。よって、頂点  $v_i$  から各頂点への最短経路の平均  $L_i$  を算出し、平均距離  $L$  を求める。

$$L_i = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} d_{ij} \quad (2.5)$$

の式で  $L_i$  は表すことができ、求める平均距離  $L$  は、次式のように定義できる。

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i \quad (2.6)$$

通常ネットワークにおいて、ノード数とリンク数が一定であるならば、 $C$  と  $L$  の値の大きさは相関があり、 $L$  の大小に応じて  $C$  もそれに対応して大きく又は小さくなる。そのような一般的な特性に対して、スモールワールドネットワークは、 $L \approx L_{rand}$  にも関わらず  $C \gg C_{rand}$  である特性がある。ここで  $L_{rand}$ 、 $C_{rand}$  はランダムネットワークがもつ特性であり、 $L$ 、 $C$  共に小さな値となる性質がランダムネットワークにはある。近傍を繋ぐリンクによりクラスタとしての性質を保ちながら、張り替えられたリンクがショートカットの役割をすることにより、それぞれのノード間の平均距離は急激に小さい“世界(世間)は想像以上に狭い”というスモールワールド現象が現れる。

Newman ら<sup>37)</sup> は、レギュラーネットワークのノードにランダムにリンクを追加するという方法で、WS モデルを改良している (NMW モデル). このモデルでは、レギュラーネットワークの近傍リンクの切断が不要となる.  $n$  個のノードから成る  $k$  次のレギュラーネットワークについて、近傍リンクを繋ぎかえる代わりに、確率  $p$  でランダムに追加する. WS モデルにさらなる簡明性が加わったモデルである.

スモールワールドネットワークとしての性質は、生物行動、自然現象、送電網や神経系等の人工的、生態系のネットワーク、人間関係の社会的ネットワークに関連した特性等様々な現実世界におけるネットワークがスモールワールドネットワークと関連があり<sup>25)</sup>、その多様なものに共通する性質の興味深さが世界中にその研究の躍進を促したといえる. ここで Fig. 2.6 にリンク張り替えの確率  $0 \leq p \leq 1$  によって、レギュラーネットワークからスモールワールドネットワーク、そしてランダムネットワークへと推移していく過程をネットワーク図で示す.

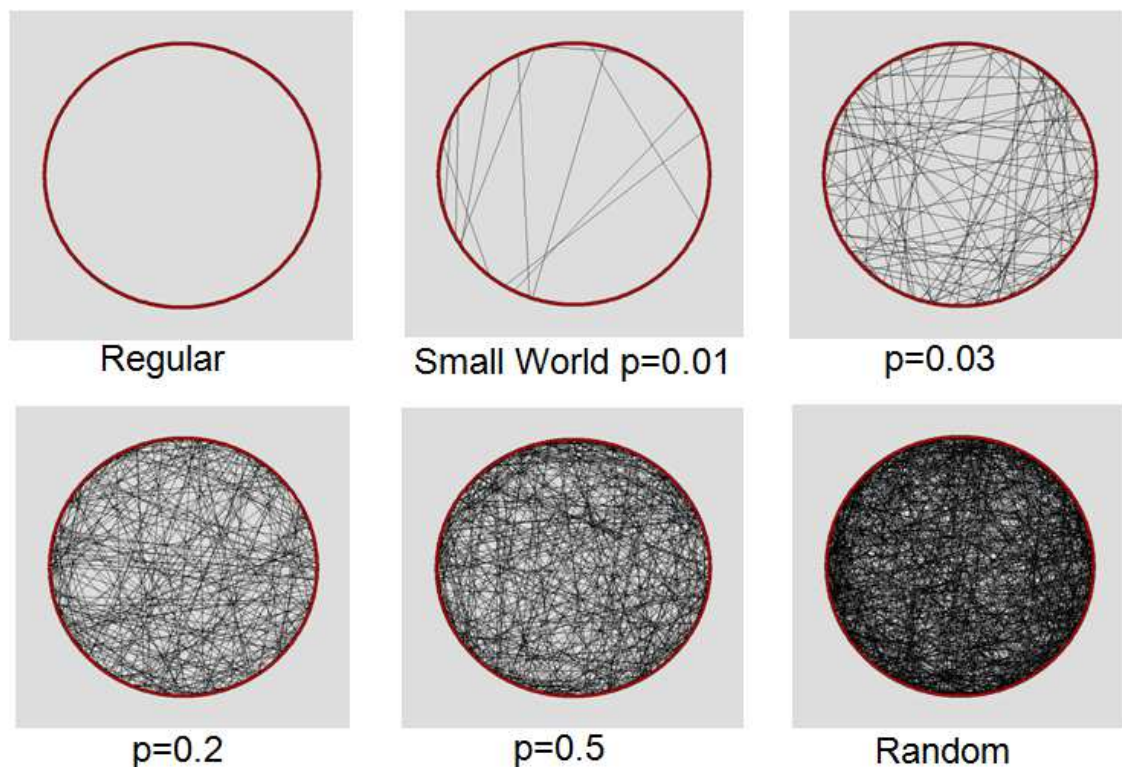


Fig. 2.6: Regular, small world, random network

## 2.2.4 スケールフリーネットワーク

スモールワールドネットワークとは違ったモデルで、複雑ネットワークとしての代表的なモデルが Barabási, A. L. と Albert, R. によるスケールフリーネットワークモデル<sup>2)</sup> である.

Barabási は、現在急速に発展し続けているインターネット構造のリンクの性質がべき(冪)乗分布に従うことを発見し、少数のリンク数しかないノードの数と、多数のリンクをもつノードの数は、べき乗則としての性質があることを様々な現実世界の事象で示している<sup>38,39)</sup>。このような性質をもつネットワークをスケールフリーネットワーク (Scale-Free Network) と呼ばれ、複雑ネットワーク研究における標準モデルの一つとなっている。

自己組織化構造においては、その性質が相転移等の変異を起こす臨界点が存在し、それは自己組織化臨界現象とも呼ばれる。その例としては、砂山モデル (Sandpile model) として砂山の崩壊の大きさと頻度に、べき乗則としての性質があること<sup>40)</sup> が代表的なモデルとして挙げられる。べき乗則としての性質は、戦争の犠牲者数と頻度、インターネットのネットワーク構造、経済市場の変動、地震のマグニチュードと頻度や生物種の絶滅等の様々な自然現象<sup>41)</sup> 等の様々な分野においても見られるものである。

また、べき乗則としての性質は、2割8割の法則(パレートの法則)のように、多数のリンクを持つ少数のノードがリンク全体の多くを占めるという性質がある。一部の富裕層が、世界の富の多くを占めているような現象や経済分野における2割の商品が8割の売上を締めている現象、結晶の成長、地震の規模と頻度といった自然現象等の様々な性質との関連がみられ、自然科学、社会科学等の諸現象の特性をみる上での重要な特性の一つとなっている。

ネットワーク構造の性質が、べき分布 (power law) に従うとは頂点  $v$  の次数  $k$  の分布が、 $\gamma$  を定数として

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (2.7)$$

となるネットワークのことをいう。

そしてこの性質をもつネットワークは、Barabási, A. L. と Albert, R. による次数の優先的選択 (Preferential Attachment) に基づき作成することができる。初期状態として、 $m_0$  個のノードを与え、各ステップごとに新たなノードから既存のノードへ  $m$  本のリンクをネットワークに張るとする。新たなノードから既存のノードにリンクを張るとき、既存のノードにおいてノード  $i$  が次数  $k_i$  を持つならば、次式の確率  $\Pi(k_i)$  によってリンクが張られる。

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (2.8)$$

そしてこのスケールフリーネットワークモデルの次数分布は、

$$P(k) = \frac{2m^3}{k^3} \quad (2.9)$$

となることが数理的に証明されている。

スケールフリーネットワークの例として Fig. 2.7 にその図を示す。そして両対数 (Log-Log) スケールに基づいた次数分布をランダムネットワークと Fig. 2.8 に併せて示す。

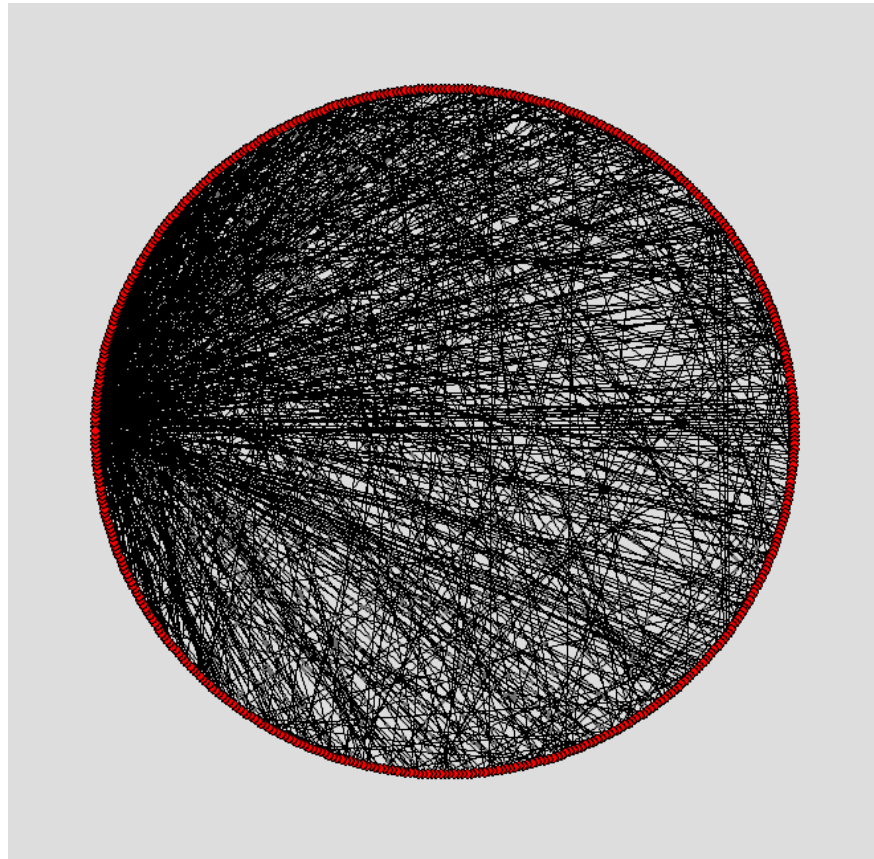


Fig. 2.7: Scale-Free network

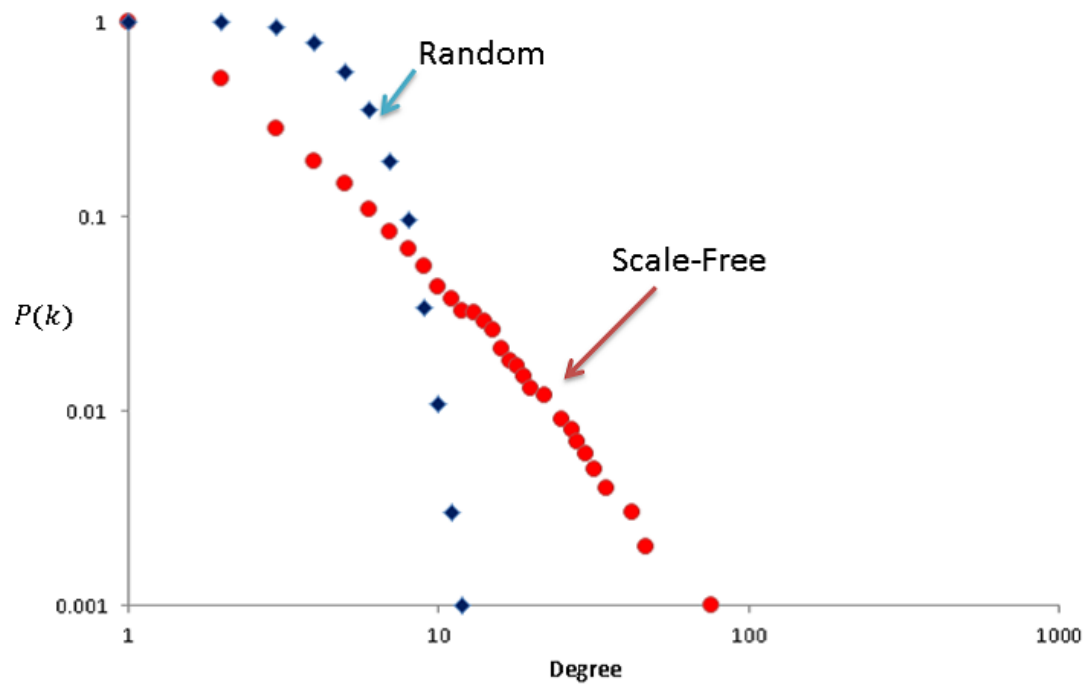


Fig. 2.8: Scale-Free network と Random network による次数分布 (両対数)



## 2.2.5 ランダムレギュラーネットワーク

本研究において対象となる大きな課題の一つであるコンセンサス，同期問題という特性をみていく上で，これまでみてきたネットワークモデル以外で比較対象として挙げられる重要なネットワークの一つとしてランダムレギュラーネットワークがある<sup>42,43)</sup>．ランダムレギュラーネットワークは，別名としてラマヌジャングラフ (Ramanujan graph) と呼ばれ，希代の天才数学者とされる Srinivasa Ramanujan によって代数学的開拓がなされている．グラフ理論における正則グラフの応用や行列表現による固有ベクトル，固有値解析等の代数学的手法で，次章で後述する代数的連結性 (algebraic connectivity 又は spectral gap) を高める理論的構築に成功している．Ramanujan の理論を基に，数学者達をはじめとして，代数学の分野を中心に，これまで解析がなされてきている<sup>43-45)</sup>．

ランダムレギュラーネットワークは，レギュラーネットワークのように，全てのノードの次数が同じであるだけでなく，ランダムネットワークのようにそれぞれのノードからのリンクがランダムに張られている．そのためレギュラーネットワークは近傍のノードとのみリンクが張られているが，ランダムレギュラーネットワークは，全次数が同じ且つランダムにリンクが張られることにより均質性の高さをもちながらも，レギュラーネットワークのような平均距離  $L$  が長いという特性はない．そのため，ランダムレギュラーネットワークはランダムネットワークとレギュラーネットワーク双方の性質を併せ持った特性のネットワークであり，これまでみてきたネットワークモデルの中で，均質性の高いトポロジーとなる．

ランダムレギュラーネットワークの例として Fig. 2.9 にその図を示す．次数は例として4としており，図よりどのノードからみても次数が同じ4であり，かつランダムにリンクが張られている．

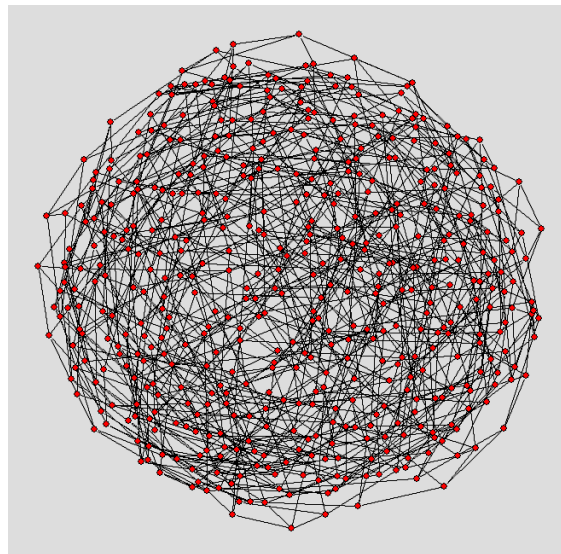


Fig. 2.9: ランダムレギュラーネットワーク

## 第3章 コンセンサス，同期問題

本章では，複雑ネットワークにおける重要な研究対象の一つであるコンセンサス，同期問題について説明を行っていく．そしてコンセンサス問題の特性において重要な関連があるラプラシアン行列らの行列表現に基づいたネットワークについて述べ，その定義についても示す．

### 3.1 コンセンサス，同期問題とは

コンセンサス問題における合意とは，個々の状態量をもつエージェントの状態がある同一の値に収束することを表す．全てのエージェントの状態量が同一になったとき，合意が達成されたという．このコンセンサス問題は，自然界における動物の群れ行動<sup>46)</sup> や生物のホタルの発光<sup>26)</sup> 同期現象，人間の議論における意見の合意や集団行動における同期現象<sup>29)</sup> だけでなく，振動子パルス<sup>47-49)</sup> の同期問題<sup>50-52)</sup> や分子間の相互作用におけるメカニズムを捉えるための物理学的視点<sup>53,54)</sup> においても重要なアプローチ視点となっている．

多数の構成要素が分散して保有する情報を，全体で共有する上でどのような形体をとるべきかを考慮する問題も，多くの分野に共通する課題である．それらは並列分散系の情報散布問題として扱われているものもあり，**Gossip algorithms**<sup>55-58)</sup> 等の研究が行われている．

今後，携帯用情報手段において益々役割が大きくなると考えられる効率的なセンサネットワーク構築<sup>59-61)</sup>，リモートセンシング<sup>62)</sup> や多数のコンピュータネットワーク構築においても，より情報伝送や共有を図る上での効率的なネットワーク設計を行う上でもコンセンサス問題は不可分なものである．また自律システムの分散制御問題として，多くの研究が行われている分野である<sup>63)</sup>．

そして多数のエージェントによるロボット，センサーや粒子等を制御する<sup>61,64,65)</sup> ための問題としても工学的に様々に有効性あるものとして用いられており，監視，探索，移動複数ロボットを制御するための分散制御や協調制御<sup>5-7,66)</sup> の問題としても重要な特性関連がある．

このようにコンセンサス，同期問題は生命体における構造や行動から自然現象，身近な社会特性，ネットワーク管理，工学的応用に至るまで多様な問題と関連したものである．

そしてこれらのコンセンサス，同期問題はネットワークと深い関連があり，グラフ理論を用いて解析することにより，そのネットワーク特性について探究していくことができる．

グラフ理論における行列表現は，多くの代数的解析や線形問題はじめ，数学的な根幹をな

す広範な基礎分野としても重要な役割がある．本研究において重要な行列表現として挙げられるのはラプラシアン行列というネットワークの隣接間の関係に基づいたものである．コンセンサス，同期問題は，ラプラシアン行列の特性と密接な関係があり，その固有値特性がスペクトル分析として重要な特性指標の一つになる<sup>5,67)</sup>．ラプラシアン行列における固有値により，多様な問題と関連したコンセンサス，同期問題の収束性について捉えることができる．まずコンセンサス，同期問題において重要な特性指標となるラプラシアン行列について述べ，続いてその特性意義と収束性について示す．

## 3.2 ラプラシアン行列の性質

これまで述べてきたようにコンセンサス，同期問題は様々な事象と深い関連があり，研究対象として，そのネットワーク特性についてみていくことは意義が大きいと考えられる．そしてネットワークをグラフ理論によるノードとエッジによる繋がりを表現することで，行列によりネットワークを解析していくことができる．ネットワークと深い関連があるコンセンサス，同期問題は，グラフ理論を用いてラプラシアン行列における固有値により，ネットワークの連結性や収束性について捉えていくことができる．まずコンセンサス，同期問題において重要な特性指標となるラプラシアン行列について述べる．

### 3.2.1 ラプラシアン行列

ラプラシアン行列は次式のように定義される．

$$L = D - A \quad (3.1)$$

ここで  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  は対角行列であり， $n \times n$  の隣接行列  $A$  について， $d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$  である<sup>68)</sup>．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad d_i = \begin{cases} \sum_j a_{ij} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (3.3)$$



$$L = D - A = \begin{bmatrix} d_1 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & d_2 & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & d_3 & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & d_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ラプラシアン行列の固有値を最小値から最大値まで順に並べると以下のようなになる．

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (3.5)$$

ここでラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2$  は代数的連結性と呼ばれ，収束の速さと関係する．最大固有値  $\lambda_n$  は情報通信の遅れに対するロバスト性と関係がある．

そして，これらのラプラシアン行列の計算においては，ネットワークを無向グラフとしているため，行列は実対称行列となり，エルミート行列<sup>69)</sup> として考えることができる．そして行列が準正定となるための十分条件は，

$$a_{ii} \geq \sum_{j=0|j \neq i}^n |a_{ij}|, \forall i \quad (3.6)$$

この等式に基づいて考えると，ラプラシアン行列  $L$  におけるそれぞれの対角成分は，ネットワークの各ノード  $i$  における次数となるので，リンクがノード  $i$  に存在するとするとラプラシアン行列において  $-1$  の成分となる．各対角成分は隣接行列におけるそれぞれの行から分かるノードがもつ次数であるリンク数の合計となり， $a_{ii}$  とおける．よって，ラプラシアン行列  $L$  は準正定な行列となる．このようなラプラシアン行列  $L$  の特性を考えると，式 (3.5) の関係が分かる．全てのラプラシアン行列において  $\lambda_1 = 0$  が成り立つ．このことは  $[1 \dots 1]^T$  のベクトルを考えることから分かる．

### 3.2.2 ラプラシアン行列と固有値特性

ラプラシアン行列の対角成分は $i$ 行目において $d_i$ として与えられるため、ラプラシアン行列におけるそれぞれのノードにおけるリンクの存在は $-1$ となり

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \{0, -1\} \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ \{0, -1\} & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

このように、実対称行列に基づいて行列を考え、全てのラプラシアン行列について、その最小固有値は $\lambda_1 = 0$ である。そしてラプラシアン行列の固有値 $\lambda_i$ は次式を満たす。

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 2d_n \quad (3.8)$$

ここで $d_n$ はネットワークにおける最大次数である<sup>69)70)</sup>。ネットワークの固有値問題としてのスペクトル特性を考える上で、それぞれ分離独立したネットワークにおいて、ネットワーク間を結ぶリンクが存在するか否かが、ラプラシアン行列における固有値が $0$ となる数との対応に繋がることとなる<sup>71)</sup>。あるネットワーク構造を仮定した上で、それぞれの部分グラフのネットワークは、ラプラシアン行列における固有値と対応している。 $0$ となるラプラシアン行列の最小固有値から第2最小固有値、第3最小固有値と順に考えると、分離独立したサブグラフのネットワーク数が2である場合、 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  and  $\lambda_3 > 0$ の固有値関係が成り立つ。これはサブグラフの分離ネットワーク数が増えるにつれて、ラプラシアン行列の $0$ をとる固有値の数が増えていくことを意味する。分離独立したサブグラフのネットワーク数に応じて固有値 $0$ の数も対応して増減することとなる。このような固有値特性をみていくと、コンセンサス、同期問題特性以外にネットワーク構造における連結、非連結特性を捉える上でも重要な指標特性となりうる事が分かる。

そしてネットワーク構造において分離独立したノードが存在せず、連結されたリンク関係であっても、ラプラシアン行列における固有値特性は、ネットワーク指標としての意義は大きい特性をもっている。ノードが連結したネットワーク構成において、ノード間のリンクの有り方がそれぞれの固有値とそれに対応する固有ベクトルの値を変動させる関係が存在する。一つのノードも分離独立していない連結されたネットワークシステムにおいても、ラプラシアン行列の固有値特性に基づいたスペクトル分析から、そのネットワーク構造の状態や構成を捉えることができる。

ラプラシアン行列における第2最小固有値は、代数的連結性 (algebraic connectivity 又は spectral gap) と呼ばれ、ネットワークの連結状態を表す意味合いをもつと共に、コンセンサス、同期問題を捉える上での重要な指標ともなる。代数的連結性である $\lambda_2$ が大きいとネットワーク構造としての形は、コンセンサス、同期問題において収束に適したものとなる。 $\lambda_2$

が低い値をもつネットワークと比較して、 $\lambda_2$  が高いネットワークの均質性は相対的に高い傾向を示し、 $\lambda_2$  の高さは、ネットワークの直径の大きさと連結性の高さに影響を及ぼす。そのため、全ノードが連結されたトポロジであっても、代数的連結性の指標によって、ネットワークの状態、性質を深く捉えていくことができる。ネットワークのノード数が少ないケースであれば、視覚的、直観的にその構造やノードとリンクの関係を把握することもある程度の範囲においてできるが、ネットワーク規模が大きくなるにつれてその把握はより難しいものとなる。ラプラシアン行列の固有値視点によるスペクトル解析は、そのような意味でも有効性があり、たとえ小規模ネットワークにおいても固有値特性によって、その構造を捉える上で定量的且つ収束性、連結性の状態を深く知ることができる。

### 3.3 コンセンサス問題の収束性

$n$  体からなる複数のエージェント（ノード）の系に対して、それぞれのエージェントの状態量  $x_i$ , ( $1 \leq i < n$ ) がある一定の値に収束するとき、合意が達成されると定義する。すなわち、次式が成り立つ。

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad (3.9)$$

これは全てのエージェントが同じ状態量をもつことであり、

$$x_i = \alpha \mathbf{1}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.10)$$

と表すことができる。ここで  $\mathbf{1} \triangleq [1, \dots, 1]$ , である。このとき  $\alpha$  は全てのエージェントの collective decision(合意の収束値)と呼ばれる。

ここで、複数のエージェントの状態量に関するダイナミクスを次式で定義する。

$$\dot{x}_i = u_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.11)$$

ここで、 $x_i \in R$  は状態 (state),  $u_i \in R$  は入力 (input) であり、グラフ  $G = (V, E)$  において、エージェント（ノード）間で相互作用し、コンセンサスに達することを考える。グラフ  $G$  における隣接行列は  $A = [a_{ij}]$  であり、エージェントの近傍 (neighbors) は次式のように定義する。

$$N_i \triangleq \{j \in V : a_{ij} \neq 0\} \quad (3.12)$$

エージェント (ノード)  $j$  がエージェント  $i$  の近傍であるならば、エージェント  $i, j$  間において通信 (相互作用) する。ここで全てのエージェントとその近傍について、頂点集合  $V = \{1, \dots, n\}$  と辺集合  $E = \{(i, j) \in V \times V\}$  によりネットワークとして捉えていくことができる。このネットワークとしてのグラフ  $G = (V, E)$  が隣接行列  $A = [a_{ij}]$  に基づき、それぞれのエージェント

(ノード)が通信(相互作用)してコンセンサスに達し、収束していくダイナミクスは次式のように定義できる.

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), 1 \leq i \leq n \quad (3.13)$$

このエージェントの相互作用によるダイナミクスを通して収束していき、コンセンサスが達成されたならば、 $x_i = \alpha \mathbf{1}$  となるので、全てのエージェントの状態量の総和は不変量となるか又は  $\sum_i \dot{x}_i = 0$  となることを踏まえると、コンセンサスの収束値について以下のことがいえる.

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_i x_i(0) \quad (3.14)$$

つまり、collective decision(合意の収束値)は、全てのエージェントの初期状態の平均値である. このコンセンサスのアルゴリズムについて不変的特性に着目して、average consensus algorithm(平均コンセンサスアルゴリズム)として用いられることがある. そして式(3.13)はラプラシアン行列を用いて以下のように表すことができる.

$$\dot{\mathbf{x}} = -L\mathbf{x}(t) \quad (3.15)$$

代数的連結性と状態量の収束性について示していくために、ラプラシアン行列の第2最小固有値について考える. 一般に、実対称行列の固有値に対し、Courant-Fischerの定理が成り立ち<sup>72)</sup>、 $n \times n$ の実対称行列 $L$ の固有値を重複するものを含めて、小さい順に並べるとき次の等式が成り立つ.

$$\lambda_2 = \min_{x \perp p_1, \|x\|=1} x^T L x \quad (3.16)$$

ここで、 $\lambda_2$  は第2最小固有値、 $p_1$  は、最小固有値に対応する固有ベクトルである.

詳細な解析を行っていく上で、次式のように誤差関数を考え、

$$\delta = x - \alpha \mathbf{1} \quad (3.17)$$

ここで、 $\delta$  については、相違する特性を捉えるためのベクトルと考える. 各エージェントの状態の総和は不変量であることを考慮すると、式(3.17)の微分すると次式を得る.

$$\dot{\delta} = \dot{x} - \dot{\alpha} \mathbf{1} \quad (3.18)$$

そして

$$L\alpha \mathbf{1} = \alpha L \mathbf{1} = 0 \quad (3.19)$$

また誤差関数  $\delta$  に関して次式が導かれる.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}^T \delta \\
&= \mathbf{1}^T x - \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1}^T x - \mathbf{1}^T x(0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

であることから

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta} \\
&= \dot{x} - \dot{\alpha} \mathbf{1} \\
&= -Lx + L\alpha \mathbf{1} \\
&= -L\delta
\end{aligned} \tag{3.21}$$

式(3.16)を踏まえ、誤差関数  $\delta$  と共に考えると、ラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2(L)$  は以下のように求まる.

$$\lambda_2(L) = \min_{\delta \perp p^1, \|\delta\|=1} \delta^T L \delta = \min_{\delta \perp p^1} \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} \tag{3.22}$$

ここで、 $\lambda_2$  は第2最小固有値,  $p_1$  は最小固有値に対応する固有ベクトルである.

ラプラシアン行列によるネットワークグラフにおいて、その最小固有値は0となり、対応する固有値ベクトルについては次式が成り立つ.

$$L\mathbf{1} = 0 \tag{3.23}$$

ここで  $\delta \perp p^1$  であることから

$$\mathbf{1}^T \delta = 0 \tag{3.24}$$

となる. よって式(3.22)から式(3.24)により

$$\lambda_2(L) = \min_{\delta \perp p^1} \delta^T L \delta = \min_{\mathbf{1}^T \delta = 0} \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} \tag{3.25}$$

を得る. 式(3.20)から常に  $\mathbf{1}^T \delta = 0$  であることから

$$\lambda_2(L) \leq \frac{\delta^T L \delta}{\delta^T \delta} \tag{3.26}$$

となる.

次に、リアプノフ関数を式(3.27)で定義する. 式(3.26)を利用すると、

$$V(\delta) = \delta^T \delta \tag{3.27}$$

これを微分し、次式が導かれる.

$$\begin{aligned}
& V(\dot{\delta}) \\
&= \dot{\delta}^T \dot{\delta} \\
&= -2\dot{\delta}^T L \delta \\
&\leq -2\lambda_2(L) \dot{\delta}^T \delta \\
&= -2\lambda_2(L) V(\delta)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

となるので

$$V(\dot{\delta}) \leq -2\lambda_2(L) V(\delta) \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
& V(\delta) \\
&= \delta^T \delta \\
&= \|\delta\|^2 \leq \|\delta(0)\|^2 e^{-2\lambda_2(L)t}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

よって

$$\|\delta\| \leq \|\delta(0)\| e^{-\lambda_2(L)t} \tag{3.31}$$

が成り立つ．このことからラプラシアン行列の第2最小固有値により，コンセンサス，同期問題における合意の達成の収束性を決定づけられることが分かる．

次にコンセンサスにおける合意の達成の情報通信遅れに対するロバスト性について考える．エージェント間における通信 (相互作用) において，情報通信遅れ  $\tau$  が存在するとき，

$$\dot{u}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \tag{3.32}$$

$$\dot{u}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t - \tau) - x_i(t)) \tag{3.33}$$

と定式化されるエージェント間のダイナミクスにおける情報通信遅れを適用する．式(3.32)式(3.33)が合意を達成するための必要十分条件として以下の式が成り立つ．よってラプラシアン行列の最大固有値が合意の達成における情報通信遅れに対するロバスト性に大きく関わることが分かる．情報通信遅れ  $\tau$  の範囲は，

$$0 \leq \tau \leq \pi/2\lambda_n \tag{3.34}$$

となり，ラプラシアン行列の最大固有値により，ネットワークにおける情報通信遅れに大きな影響が及ぶことが分かる．そしてこの集合的ダイナミクスをラプラシアン行列により表すと，

$$\dot{\mathbf{x}} = -L\mathbf{x}(t - \tau) \quad (3.35)$$

と示される.

ここまでみてくると, ラプラシアン行列の第2最小固有値と最大固有値がコンセンサス, 同期問題において重要な特性があることが分かる.

### 3.4 ラプラシアン行列とエージェントの合意

ここで, ポテンシャル関数 (potential function) として, 次のようにラプラシアン行列の二次形式 (quadratic form) を定める.

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx \quad (3.36)$$

ラプラシアン行列の性質から, このポテンシャル関数は,

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t))^2 \quad (3.37)$$

となる.

式 (3.37) は, SOS(Sum of Square) となっており, 二次形式となっていることがわかる. すなわちラプラシアン行列の二次形式  $\frac{1}{2}x^T Lx$  は半正定 (semi-positive definite) である特性があり, ここで式 (3.37) の微分を考え,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{x}^T Lx + x^T L\dot{x}) \\ &= -x^T L^T Lx \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

と展開できる. よってポテンシャル関数 (potential function)  $V(x)$  は非正定 (semi-negative definite) であり,  $L\mathbf{1} = 0$  の特性からも, ラプラシアン行列としての特性対応が取れる. これらのことから, ポテンシャル関数 (potential function)  $V(x)$  に対する勾配系を考え,

$$\dot{x}(t) = -\nabla V(x(t)) \quad (3.39)$$

となることから,  $V(x(t))$  のポテンシャル関数に対する勾配系から, 式 (3.36) に基づくエージェント間の量の差は, ポテンシャル  $V(x(t))$  を減衰させる方向に力が働いていくことが分かる.

よって, ネットワーク化されたエージェント系のコンセンサス, 同期問題において, 収束していく性質を捉える上でのラプラシアン行列による特性解析が有効であることが分かる.

そして、式(3.31)や式(3.34)で述べたように、ラプラシアン行列の第2最小固有値がコンセンサス問題における合意の達成の収束性に大きな影響を及ぼし、最大固有値が合意の達成の情報通信遅れに対するロバスト性に関わる特性があるため、これらの固有値特性によって、ネットワークを捉えることの意味は大きいといえる。

### 3.5 コンセンサス，同期のダイナミクス

これまでみてきたように、コンセンサス，同期の問題において、ラプラシアン行列の固有値が重要な役割を果たすことが分かる。そしてそのことは、ネットワーク構造がコンセンサス，同期問題と密接に関連していることを示すものである。どのようなネットワークがコンセンサス，同期に適しているかを考える上で、次のようなダイナミクス過程を考える。

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sigma \sum_{j \in n.n.i} [H(x_j) - H(x_i)] \quad (3.40)$$

すなわち

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_j L_{ij} H(x_i) \quad (3.41)$$

ネットワーク上において、それぞれのエージェント(ノード)の状態量がコンセンサスに達する過程はこのようなダイナミクスにより捉えることができる<sup>73)</sup>。

ここで  $x_i (i \in 1, 2, \dots, n)$  はそれぞれの状態量を表す変数であり、 $F$ 、 $H$  はそれぞれ進化、結合関数である。ここで  $\sigma$  は定数である。ここで一般的な線型安定な解析は以下のようにして行われる。 $\dot{x}^s = F(x^s)$  の解である  $x^s$  を考え、完全に同期となっている状態

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x^s \quad (3.42)$$

を展開する。そして対角化されたラプラシアン行列  $L$  の  $n$  の固有値を考えると、次のような摂動方式  $y_i$  による式が成り立つ。

$$\dot{y}_i = \left[ F'(x^s) - \sigma \lambda_i H'(x^s) \right] y_i \quad (3.43)$$

全ての固有値において、上式による形式は同様に考えることができるが、異なった効果的接合  $\alpha = \sigma \lambda_i$  をもっている。そして式(3.43)はリアプノフ指数により有界な区間  $[\alpha_A, \alpha_B]$  において負定である<sup>73,74)</sup> と一般化できる。

そして全ての効果的接合において次式が成立する。

$$\alpha_A < \sigma \lambda_2 \leq \dots \leq \sigma \lambda_n < \alpha_B \quad (3.44)$$



すなわち同期状態が線型的に安定となる条件は  $\frac{\lambda_n}{\lambda_2} < \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$  であり、ネットワーク構造が重要な影響を及ぼすことが分かる． $\frac{\alpha_B}{\alpha_A}$  が  $x_i (i \in 1, 2, \dots, n)$  の状態量や、 $F$ 、 $H$  の進化、結合関数のダイナミクスにより成立し、 $\frac{\lambda_n}{\lambda_2}$  の固有値の関係がネットワーク構造により決定されることを考えると、ラプラシアン行列による第2最小固有値と最大固有値が同期条件において不可分な役割をもつことが分かる．

つまり、同期条件が安定となるためにはラプラシアン行列による第2最小固有値と最大固有値による比率  $\frac{\lambda_n}{\lambda_2}$  が小さいほど良いということになり、固有値による比率を

$$Q = \frac{\lambda_n}{\lambda_2} \quad (3.45)$$

として定めると、 $Q$ (condition number) がより小さい特性をもつネットワーク構造がコンセンサス、同期問題において優れたものとなる．そして  $Q$  がより小さいものを求めるということは、 $\lambda_n$  がより小さいものを求めると共に、 $\lambda_2$  がより大きいすなわち代数的連結性の高いネットワークを求めるということになる．

このようにみてくると、ラプラシアン行列の固有値特性がネットワーク構造における、コンセンサス、同期問題に不可分な重要な意義があることが分かる．一般的に  $Q$ (condition number) の値が小さいネットワーク構造を求める問題は困難であり、本研究では進化的アルゴリズムを適用することによって優れた特性をもつネットワーク構造の生成設計を考える．

### 3.6 離散時間におけるコンセンサス過程

コンセンサス問題における離散時間における推移過程は次式のようになる．

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)), 1 \leq i \leq n \quad (3.46)$$

このような離散時間におけるアルゴリズムにおける推移過程のネットワークダイナミクスは

$$x_i(k+1) = Px_i(k) \quad (3.47)$$

とおける．

ここで  $P = I - \varepsilon L$  ( $I$  は単位行列) であり，

$$\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{d_n}\right] \quad (3.48)$$

$\varepsilon$  はそれぞれの推移過程におけるステップサイズである． $P = \exp(-\varepsilon L)$  と式 (3.46) のアルゴリズムによって，これらの過程は示される．ここで  $P$  は，グラフ  $G$  による推移確率行列 (Stochastic matrix or Perron matrix) であり，ネットワーク上における Random Walk<sup>75-77</sup> や Gossip algorithms<sup>55-58</sup> をはじめ，様々な現象の推移過程を記述する上で用いられている．

### 3.7 推移確率行列と正規化ラプラシアン行列

コンセンサス問題における離散時間における推移過程として関連する推移確率行列 (Stochastic matrix or Perron matrix) である  $P$  は別名として正規化隣接行列と呼ばれ，次式のように定義できる．

$$P = D^{-1}A \quad (3.49)$$

であり，

$$D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{d_1} & \frac{a_{13}}{d_1} & \frac{a_{14}}{d_1} \\ \frac{a_{21}}{d_2} & 0 & \frac{a_{23}}{d_2} & \frac{a_{24}}{d_2} \\ \frac{a_{31}}{d_3} & \frac{a_{32}}{d_3} & 0 & \frac{a_{34}}{d_3} \\ \frac{a_{41}}{d_4} & \frac{a_{42}}{d_4} & \frac{a_{43}}{d_4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ここで  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  は対角行列であり， $n \times n$  の隣接行列  $A$  について， $d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$  である<sup>68</sup>).

一般に，ネットワーク上の Random Walk について，推移確率行列を作成し，その固有値  $\mu_i$  より収束性について議論することができる．ネットワーク上の Random Walk は，そのネッ

トワーク構造上で確率的に選択された頂点に離散ステップで移動していく過程である．ネットワークのグラフ  $V \times V$  上の推移確率行列  $P = (p_{uv})_{u,v \in V} \in [0, 1]^{V \times V}$  を次式のように定める．

$$p_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{d(v)} & \text{if } v \in N(u) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.51)$$

ここで， $N(u)$  は， $u \in V$  に隣接する頂点の集合，また  $d(u) = |N(u)|$  とする．

推移確率行列の固有値を順に以下のように考える．

$$1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \cdots > \mu_n \quad (3.52)$$

そして，その収束率は  $\Phi$  は

$$\Phi = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.53)$$

となり，第2最大固有値  $\mu_2$  の値が小さいほど，収束が速いということになる<sup>56-58</sup>．ラプラシアン行列の場合は第2最小固有値が大きいほど収束が速いという性質があるが，推移確率行列においては最小ではなく最大からみた第2最大固有値が重要な特性指標となる．

そしてこの推移確率行列は式(3.49)で定義したように正規化隣接行列であり，隣接行列を次数に基づいて正規化したものでもある．単位行列から正規化隣接行列を引いたものを次式のように正規化ラプラシアン行列  $Q$  (Normalized Laplacian matrix) として定義できる．

正規化ラプラシアン行列は，

$$\begin{aligned} Q &= I - D^{-1}A \\ &= D^{-1}L \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{d_1} & -\frac{a_{13}}{d_1} & -\frac{a_{14}}{d_1} \\ -\frac{a_{21}}{d_2} & 1 & -\frac{a_{23}}{d_2} & -\frac{a_{24}}{d_2} \\ -\frac{a_{31}}{d_3} & -\frac{a_{32}}{d_3} & 1 & -\frac{a_{34}}{d_3} \\ -\frac{a_{41}}{d_4} & -\frac{a_{42}}{d_4} & -\frac{a_{43}}{d_4} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

と定められる．そしてグラフラプラシアンの性質と式(3.54)から

$$Q\mathbf{1} = 0 \quad (3.56)$$

が成り立つ．

推移確率行列や正規化ラプラシアン行列においては，次数による正規化が行われており，weighted graph(重み付きグラフ)となる．コンセンサスにおける収束ダイナミクス過程を考える上では Alternative Forms of Consensus Algorithms による過程が次式のように定められる．

$$\dot{x}_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)), 1 \leq i \leq n \quad (3.57)$$

ここで,  $a_{ij} = \frac{1}{|N_i|} = \frac{1}{d_i}$  for  $j \in N_i$  であり, これらの収束を考えるためには, 重み付きを考慮した **weighted-average consensus** により

$$\alpha = \frac{\sum_i d_i x_i(0)}{\sum_i d_i} \quad (3.58)$$

となる.

つまり, **collective decision**(合意の収束値) は, 全てのエージェントの初期状態の平均値にネットワークのリンクの重みを考慮したものであり, コンセンサスのアルゴリズムについて **average consensus algorithm** はそれを考慮していないものとなる. このようにラプラシアン行列や正規化されたものである推移確率行列, 正規化ラプラシアン行列からもコンセンサスの収束値について捉えることができる. そしてこれらの行列表現とその固有値からネットワークにおける連結性, コンセンサスや同期問題に対して根底構造を捉えていくことができ, ネットワークをみていく上で, 重要な指標であるといえる. 本研究においては, このようなネットワーク構造と深い関連のあるラプラシアン行列, 推移確率行列, 正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいた視点により最適ネットワークの生成設計を行い, その構造を捉えていく.

## 第4章 進化的アルゴリズムのネットワーク生成への適用

本章においては、まず最適化を行うための進化的アルゴリズムについての説明を行い、本研究において用いる遺伝的アルゴリズムのモデルについての仕組みを述べる。そして最適ネットワークを生成設計するために進化的アルゴリズムをネットワークへ適用する方法について述べ、進化的アルゴリズムにおける設定状態についても説明する。

### 4.1 進化的アルゴリズム

進化的アルゴリズム (evolutionary algorithm) は進化的計算の分野に包含され、進化論をはじめとする生命現象の進化原理に基づいた、メタヒューリスティックな問題解決手法 (最適化アルゴリズム) の総称である。自然淘汰、適者生存、突然変異、遺伝子変換等の進化原理の構造を手法の発想として用いた最適化方法である。個体群によって解の候補を設定し、適応度関数により解の生死判定を繰り返し、個体群の進化により最適化を行う。特定の問題に依存せず、応用範囲の広い手法であり、様々な分野の問題において有効な解を算出してきており、その有効性が示されている。

本研究においては、この進化的アルゴリズムの代表的なものの一つである遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) を用いてネットワークの最適化を行う。

## 4.2 遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) は, John Henry Holland によって 1975 年に提案された進化的アルゴリズムの代表的なものの一つであり, 遺伝子の複製・選択淘汰のような生物の進化の過程を模倣した近似解を探索する上で有効なメタヒューリスティックな確率的探索最適化アルゴリズムである.

現実における様々な問題を捉える上で, 最適解は不明であるが, その問題解に対する評価は可能なことは多数ある. 遺伝的アルゴリズムはそのような問題に対して有効であるという特性がある. 遺伝的アルゴリズムは, メタヒューリスティックな手法の中でも, 主要な探索手段である交叉が局所探索ではないことに特徴があり, 解空間構造が不明で決定的な優れた解法がなく, 全探索が不可能に近いほどの広大な解空間特性のある問題に有効である. そして, 最適解の求め方が非常に非効率で実用にならない問題に対しても有効であり, 応用分野の広さも遺伝的アルゴリズムの強みがある特性である.

遺伝的アルゴリズムの基本的な流れとして, ある定められた形式によりコード化して 1 つの個体とし, 個体群に対して遺伝的なメカニズムで進化させる. 個体群による解候補を遺伝子表現としてコード化し, 染色体 (Chromosome) として扱われる. 選択 (selection), 交叉 (crossover), 突然変異 (mutation) 等の遺伝的操作を繰り返し行って進化し, 最適解を求めていく. その基本的な流れは以下の操作による.

- (1) 初期化
- (2) 評価 (適応度関数)
- (3) 選択
- (4) 交叉
- (5) 突然変異
- (6) 世代交代による進化

以下に遺伝的アルゴリズムによる操作の説明を述べる。

- 初期化

個体数を設定し、ランダムに染色体の集まりである個体群(母集団)を生成して初期化を行う。染色体は遺伝情報を伝える実体として存在する。生物の塩基をデータ領域や配列で表現する。ここで初期の集団が生成される。遺伝子長が長いほど、大きな集団サイズが必要となる。集団サイズを小さいと、計算量は減るが、収束時間が大きくなり、局所解に陥る可能性が高くなる。集団サイズを大きいと、収束時間は小さくなるが、計算量は増大する。

- 評価(適応度関数)

定められた適応度関数によって、個体の遺伝子による解の良さを各個体ごとに求めて評価し、各個体の評価値を計算する。基本的な特性としては、より良い個体が高い適応度の評価をされることが多い。

- 選択

進化原理に基づいて、自然淘汰のように各個体の評価値から次世代への生き残る度合いを決定する(適応度)。各々の個体に適応度が決定されると、適応度により次世代への残りやすさが決まる。それによって選択交配が行われる。

遺伝的アルゴリズムには、様々な選択方法があり、本研究で用いる方法と関連のあるもの及び代表的なものを説明する。

- － 適応度比例戦略

適応度比例戦略は別名としてルーレット選択とも呼ばれ、個体群の各個体による適応度の統計に対する各個体の割合を確率として個体を選択する確率的な選択方法である。適応度比例戦略は解析が比較的容易であり、適応度比例戦略は各個体の適応度に比例するように確率的に選択される。その確率を  $P_i$  とすると

$$P_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (4.1)$$

ここで  $f_i$  は個体  $i$  の適応度、 $n$  は個体数である。適応度比例戦略は、適応度の高い個体が次世代の個体として選ばれる可能性が大きいですが、適応度の低い個体も選択される可能性があり、個体群の多様性を維持し、局所解に陥るのを防ぐ効果もある。

- － エリート戦略

個体群の中で最も適応度の高い個体を無条件でそのまま次世代に残す手法である。適応度比例戦略のような確率的な手法では、良い個体もすぐに消滅する可能性があり、少ない世代数で適応度の高い解を求めるような場合には向かない。エリー

ト戦略は個体群の中で最も適応度の良い個体が次世代にそのまま残るため、その世代交代時において、最良個体が交叉、突然変異によって消滅しないという強みがある。しかし、最良個体の遺伝子が個体群の中に急速に広がり、初期収束、局所解に陥る可能性がある。このような特性により、エリート戦略は他の選択方法と組み合わせて使用されることが一般的である。

- トーナメント戦略

トーナメント戦略は予め決めたトーナメントサイズだけ集団からランダムに個体を取り出し、最も適応度の高い個体を選択する。トーナメントサイズを変更する事で選択圧をコントロールできるが、選択圧が高いと初期収束による局所解に陥りやすい特性がある。

- ランキング戦略

ランキング戦略は適応度によって各個体にランクをもたせる。ランクに応じて確率を定めて選択されるため、適応度比例戦略と違い選択確率が適応度の格差に影響されない特性がある。個体へのランク付けのため次世代が揃うたびにソートを行うことや適応度の差が少ない個体間でも選択確率に差が出るデメリットも存在する。

- 交叉

個体の遺伝子をルールに従って入れ替え、新しい個体を生成する。生命体の繁殖にあたる位置づけである。重要な役割を果たす遺伝的操作であり、選択された個体間での染色体の組み換えにより新しい個体を生成する。交叉は個体群の中から任意の2つの親をランダムに選び、ランダムに選ばれた1点あるいは多点の交叉点で遺伝子を組み換え、新たな2つの個体(子)を生成する操作である。以下に代表的なものを説明する。

- 一点交叉

一点交叉とは、単純交叉とも呼ばれる最も単純な交叉規則である。一点交叉では2つの親の遺伝子列上で、ランダムに交叉点を一箇所選び、交叉点の前後で遺伝子を交換して2つの子を生成する手法。GA創成期の交叉方法であるが、効率は低く現在ではあまり用いられない。

- 多点交叉

多点交叉とは、1点交叉の拡張方法であり、交叉点をランダムに複数決定し、二つの交叉点に挟まれている部分を入れ換える交叉点前後を視点とした遺伝子交換が行われる。交叉点が多いと親の利点が薄れる可能性があり、2点交叉までが用いられることが多い。多点交叉は二点交叉や一様交叉よりも良い値が出ることは稀である。



- 一様交叉

一様交叉は多点交叉の一種であり、マスク(ランダムなビット列と一般的に扱われる)を用いて交叉を行う。マスクを遺伝的アルゴリズムで生成し、各遺伝子ごと独立に確率的操作で入れ換える交叉である。二点交叉が得意とする問題では不利であり、二点交叉と逆の性質を示す。

- 突然変異

個体の遺伝子の一部が変化し、異なる特性をもつものを生成させる。個体の多様性維持と関連する。生物が進化していく際に稀に異なった特性をもつものが、遺伝子のコピーミス等により現れる特性にあたる。

突然変異が無ければ、初期遺伝子の組み合わせ以外の空間探索が行いにくく、進化して得られる解に限界が生じる。染色体上のある遺伝子の値を定められた突然変異率で他の対立遺伝子に置き換えることにより、交叉のみでは生成することができない子を生成して個体群の多様性を維持する機能がある。具体的な方法としては、遺伝子型がビット列であれば遺伝子座の0と1を入れ換え、数字の場合は乱数と変換し、遺伝子座の位置を変更する等の方法がある。

突然変異の注意点としては、変異確率が大きいと適応度の高い部分解であるスキマタが全て消滅してしまう可能性があり、変異確率が小さいと局所解に陥る可能性がある。交叉により生成された二つの個体の近似度距離を測定し、距離が近いほど高い変異率とする適応変異(adaptive mutation)手法等の探索法もある。集団中の遺伝子型の多様性を確保し、広い解空間を求めいく効果がある。

- 世代交代による進化

これまで記述してきた操作を繰り返し行って世代交代を行い、適応度関数に合う個体を残していく。世代の個体数が定められた個数になったら次世代の内容を現世代に移す操作を取る。終了条件に合致した場合、処理を終了して解を得る。世代交代数が少ないと、十分な最適解が得られない可能性があるため、問題や規模に応じて世代交代数は十分に考慮する必要がある要素である。結果として、現世代の中で最も適応度の高い個体が解として決定される。

### 4.3 世代交代モデル Minimal Generation Gap(MGG)

本研究で用いる遺伝的アルゴリズムの世代交代モデルについて説明する。

遺伝的アルゴリズムにおいては、遺伝子型としての解のコード化、交叉や突然変異の方法、世代交代の行い方が重要である。親個体による解の要素を子個体に適切に継承させる性質である形質遺伝が優れていても、多様性の維持に劣った世代交代モデルでは、最適解を求める能力は低いといえる。コード化と交叉は問題に依存するが、世代交代は問題とは独立に設定でき、世代交代の性能評価も問題とは独立に可能である特性がある。

4.2 節において、遺伝的アルゴリズムの流れを示したが、その中の選択という操作は、複製選択と生存選択の二種類がある。複製選択 (Selection for Reproduction) とは、子個体を生成するための親個体の選択であり、生存選択 (Selection for Survival) とは、生成された子個体のうち次世代に残る個体を選択することである。子個体生成とは交叉や突然変異等の操作により、新しい子個体を生成することである。

本研究で用いる遺伝的アルゴリズムの世代交代モデルは、これらの過程が優れたモデルである。世代交代方法は Minimal Generation Gap(MGG)<sup>78)</sup> であり、コード化と操作においては形質遺伝が、世代交代においては多様性維持が重要とされており、MGG はその多様性維持に優れた世代交代モデルである。

MGG の選択における操作においては、複製選択は適応度を無視して、母集団から個体をランダムに非復元抽出する。他の代表的な世代交代モデルとは異なり、母集団の中から2つの親個体のみ抽出する。生存選択においては、2つの親個体と生成個体数分の子個体(家族)の中から、最良1個体とルーレット選択により選ばれた1個体を次世代に残すという操作を行う。MGG は、探索序盤における選択圧をできるだけ下げることにより初期収束を起こさないようにすると共に、探索の後半になってきても集団内に多種多様な個体を生存させやすくさせ、進化的停滞を抑制させる特性がある。MGG は多様性維持に優れているため、小さい集団サイズにおいても良好な性能を出す性質がある。

MGG について分散値を評価値として用いて評価すると、世代交代を行って進化が進むにつれて、最良値を更新しつつ分散の大きさを維持する特性があり、初期収束を回避し、進化的停滞を抑制できる性質がある。そのため、従来の世代交代モデルとして代表的なものである SGA,<sup>79)</sup> IGS,<sup>80)</sup> SS,<sup>81)</sup> CHC,<sup>82)</sup> ER<sup>83)</sup> と MGG を比較すると2次元 Rosenbrock 関数、ランダム配置 100 都市問題や 10 次元の Rastrigin 関数、Schwefel 関数等の GA におけるベンチマークとして有効な評価指標において、優れた性質を MGG はもっていることが示されている。

このようなことから、世代交代モデルとして有効なモデルである Minimal Generation Gap(MGG) を適用して、本研究の目的である最適ネットワークの生成設計に応用させる。

## 4.4 ネットワークと設計設定

ネットワークのモデル化における表現方法において、本研究においては進化手法による最適化を行うための措置が必要であり、これまで述べてきた遺伝的アルゴリズムを適用させるためのコード化を行わなければならない。ここからネットワークの隣接行列のコード化による表現方法と進化的アルゴリズムの適用の手法について述べていく。

### 4.4.1 ネットワークと隣接行列

ネットワーク  $G$  は、一定のノード数 ( $n$ ) を持つ無向グラフとして表す、ここで、ネットワークの隣接行列  $A = [a_{ij}]$  により、進化的アルゴリズムを用いて最適ネットワークを生成する。この隣接行列  $A$  は全てのノードに与えるので、 $n \times n$  行列である。このコード化により、隣接行列を直線状に並べることで、進化的アルゴリズムが適用できる利点を持つ。本研究における進化的アルゴリズムの適用、ラプラシアン行列の固有値を考慮する上で重要な役割を果たす隣接行列は、Fig. 4.1 に示すようにそれぞれのノードがエッジにより接続される。

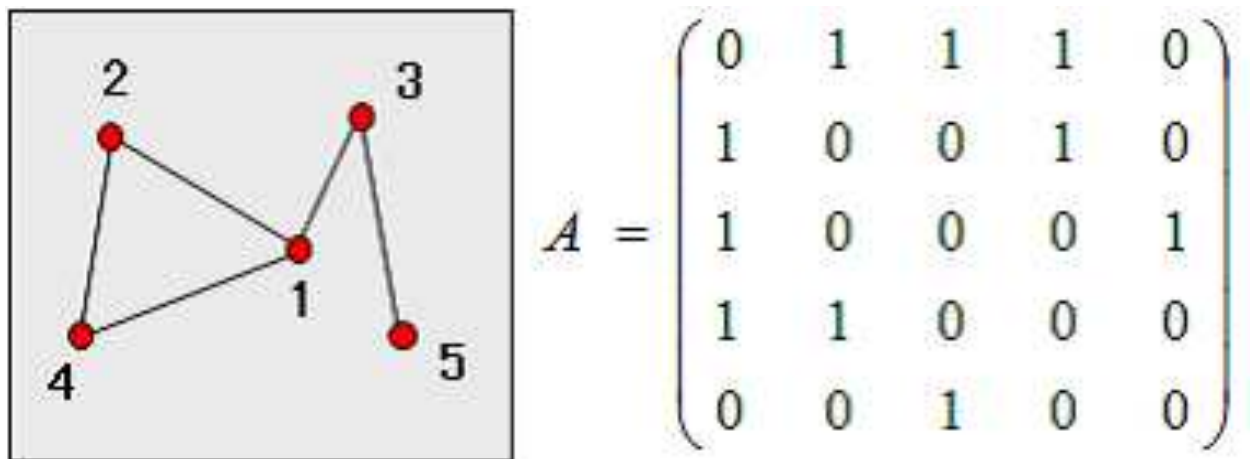
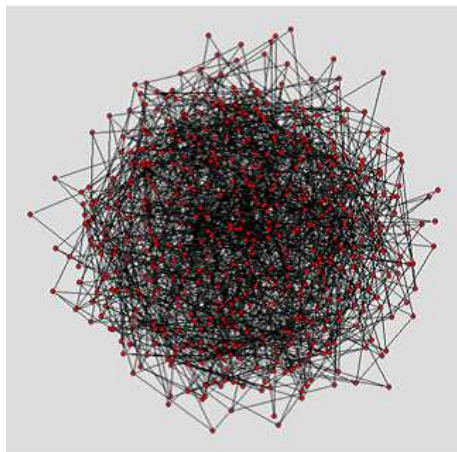


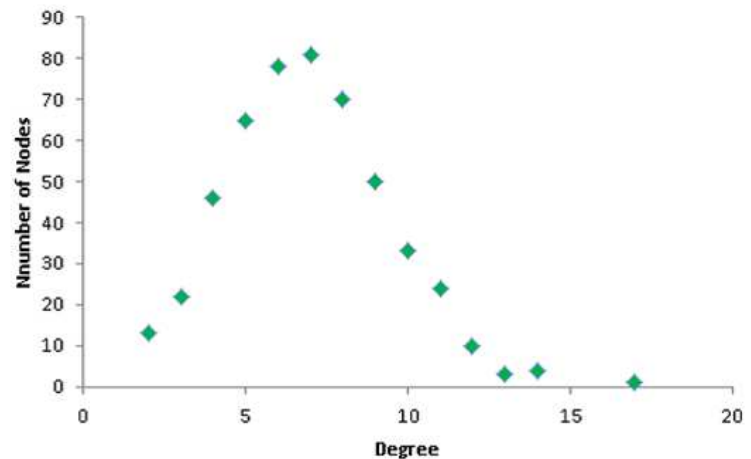
Fig. 4.1: 隣接行列の接続

#### 4.4.2 初期ネットワーク

初期に生成するネットワークとその度数分布を Fig. 4.2 に示す. 各ノード当たり, 平均次数は7で, ポアソン分布に従って生成させるため, 初期に生成するネットワークはランダムネットワークが生成されている. これは進化的アルゴリズムにおける初期世代に相当し, ここから進化最適化が行われる. このようなランダムネットワークを生成し, 遺伝的アルゴリズムに適用することで, ネットワークを進化生成させることができる.



(1) 初期ネットワーク



(2) 度数分布

Fig. 4.2: 初期ネットワークと度数分布

#### 4.5 進化的アルゴリズムのネットワーク生成への適用

ネットワークを作成するモデルの考案は, これまで多くのモデルが提案されており, それらはネットワークの特性, 構造やローカルな設計ルールに基づいたものが相対的に数が多い. 本研究においては, ネットワークの生成を遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) による最適化によって行うことで, ネットワークを目的特性に合うよう進化させたモデルを生成設計する. そのため, 従来研究で多くなされているランダムリワイヤリングや次数の優先的選択等の規則的なルールによって作成された後に, それらの特性やネットワーク構造をみていくのではないアプローチとなる. 目的特性に合った最適なネットワークを考えるという流れは, 従来研究と比較すると, 相対的にあまり行われていないアプローチ手法である.

本研究における遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) による最適化としてのネットワーク生成設計モデルは, ネットワークを隣接行列にコード化して, 交叉と突然変異を行わせる. そして世代交代モデルによる方法で, 親個体と子個体の中で最適な個体を選択, 残りは淘汰していくことを繰り返して適応関数に合うように最適化されたネットワークが生成される.

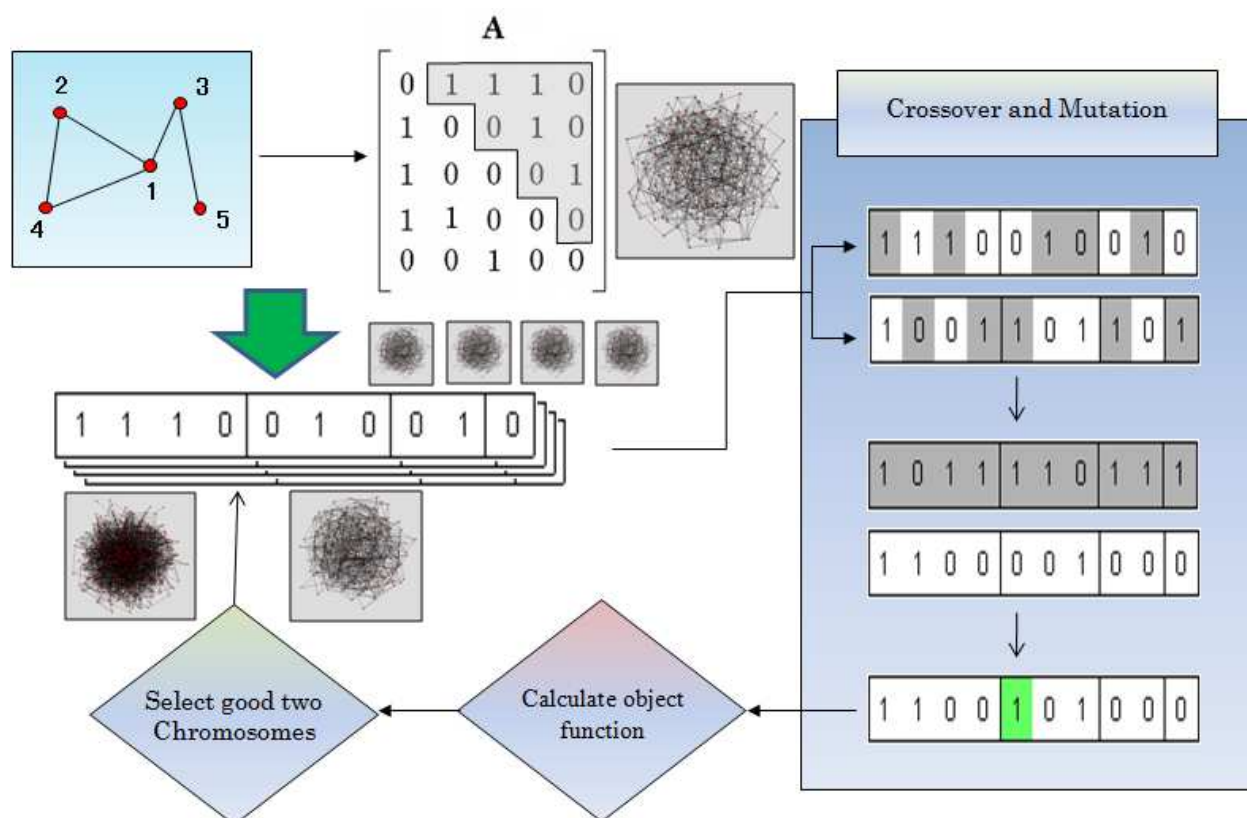


Fig. 4.3: 進化的アルゴリズムによるネットワーク形成の概念図

世代交代法として  $MGG^{78)}$  モデルを適用する．世代交代法における  $GA$  のモデルとして  $MGG$  は，4.3 節において示してきたように優れたものであり，最適なネットワークを設計する上での最適化手法として有効なモデルある．生存選択，リンクの張り替えを行い，次世代に残る新世代のネットワークを生成していく．初期世代のネットワークとして，リンクが張られる存在確率をある分布に従って定め，それによってリンクが張られたネットワークを初期世代として用いる．本研究では，ネットワークの次数分布が初期密度  $p_0$  を持つポアソン分布になるように生成する．ここで， $p_0$  は  $7/nC_2$ ，個体数は 50，交叉率は 0.7，突然変異率は  $2/nC_2$  である．ネットワーク  $G$  の隣接行列を遺伝子表現として用いるが，隣接行列の上の三角成分を直線状に並べたものを染色体とする．このため，行列は対称であり，要素は 0 または 1 の値のみを取るようになる．また，対角成分は 0 となる．上記の交叉や突然変異では，分離独立したネットワークが生じてしまう可能性があり，それを修正する操作として，次世代において分離されたネットワークが生成された場合，つまり全体としてのノード間の距離を計測することができなくなった場合には，適応関数による評価値を高め，分離されたネットワークを選択することができないようにするという操作を行う．これによって，ネットワークは進化最適化の過程の中で分離生成されたものが増大して，全体として連結したネットワークを形成しきれずになることはなく，最適化されたネットワークを進化生成させていくことができる．

このように定められた以上の手順を繰り返しながら、定式した適応関数により、どの程度の特徴量を達成したかを適応度とし、最適化を行うことで所望のネットワークを進化生成する。このアルゴリズムの概念は、Fig. 4.3 に示す。

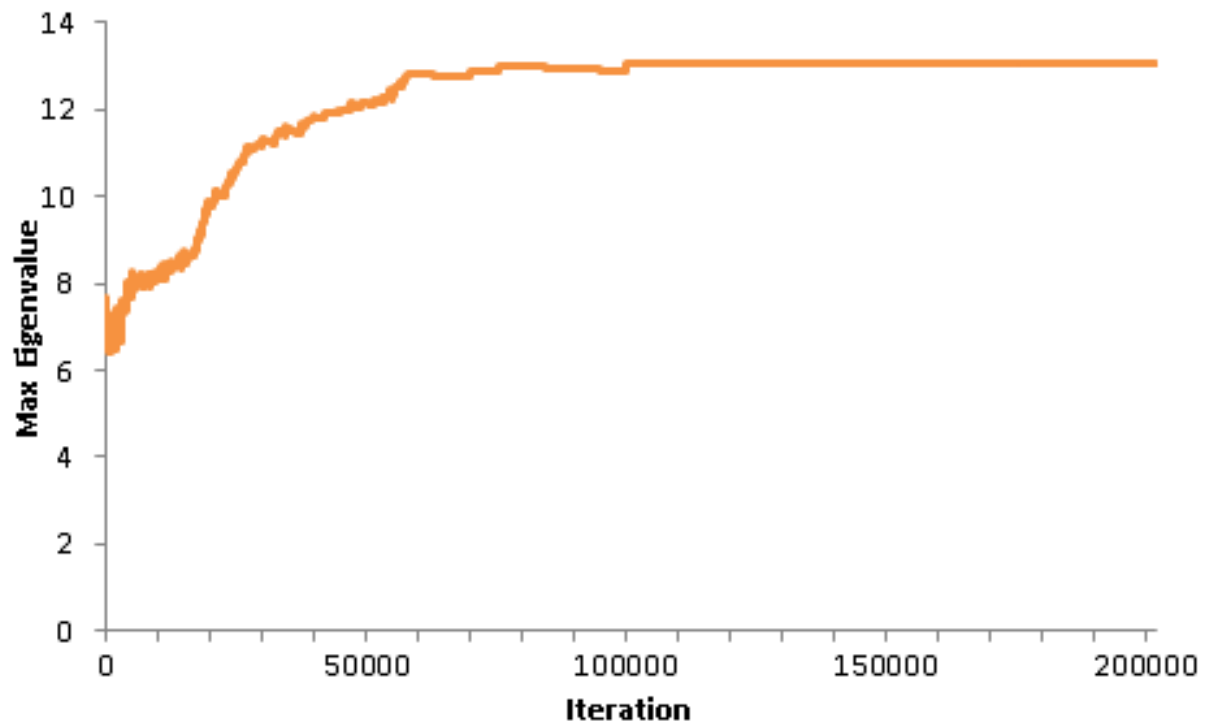


Fig. 4.4: ネットワークの進化生成過程

また、Fig. 4.4 に、このアルゴリズムによりネットワークを進化生成させていく過程を示す。適応関数は式 (8.3) を例として用いている。横軸は進化を行う世代数であり、縦軸は隣接行列の最大固有値を表す。進化の過程で固有値が高まっていき、収束していることが分かる。このような進化生成過程により、従来モデルよりも優れたネットワークを進化生成させる。

## 第5章 最適ネットワークの生成設計

ラプラシアン行列による固有値特性は、3章で述べてきたように、コンセンサス、同期問題を捉える上で重要な特性関連があり、最適ネットワークの生成設計において、ラプラシアン行列の固有値を用いた進化手法による最適化を行う。

コンセンサス、同期問題において優れたネットワークの構造を設計するために、ラプラシアン行列  $L$  の第2最小固有値、最大固有値がコンセンサスにおける収束性の速さや情報遅延のロバスト性に関わってくる。ラプラシアン行列の固有値とリンクコストの最小化の制約を考慮するという評価関数に基づいて、ネットワークを進化生成させる。そして、遺伝的アルゴリズムによるネットワーク最適化の従来研究<sup>84-87)</sup> においては、次数、クラスタリング係数、媒介中心性等のこれまでの研究でよく用いられてきた指標であるが、本研究における行列表現によるネットワークの固有値特性による最適化は、相対的にみてもあまり行われていないものであり、ラプラシアン行列の固有値特性の意味からして、その最適化によるネットワーク生成は、コンセンサス、同期問題の最適構造をみていく上で重要な意義がある。次にネットワーク進化生成のための適応関数について説明する。

### 5.1 適応関数の定義

進化的アルゴリズムを適用してネットワークを生成設計する上での適応関数とする定義を以下に述べる。適応関数を定義する上で重要な特性指標となるリンク密度、平均次数やコンセンサス、同期問題において根底に関わるラプラシアン行列の固有値によって、進化的アルゴリズムにおける目的指標は定められる。

#### 5.1.1 リンク密度

安定性などのネットワークの重要な性質は、その根底にあるネットワークの隣接行列と深い関係がある<sup>88,89)</sup>。ここでネットワークの密度をノード数を  $n$  として、次に定義する。隣接行列を用いて、ネットワーク  $G$  の平均次数を定義する。

式 (5.1) において、ノード数を  $n$  で、平均次数を  $\langle k \rangle$  を表す。そして、以下の式をリンク密度として定める。

$$\alpha = \frac{\langle k \rangle}{n-1} \quad (5.1)$$

全てのノードが他のノードと連結されていれば(全連結グラフ), 全部で  ${}_nC_2$  本のリンクが存在する. その値を最大値として, ネットワーク  $G$  が持つリンク数の相対比により, リンク密度  $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$  を定義する.

$$\alpha = \frac{1}{{}_nC_2} \sum_{k=1}^n a_{ij} \quad (5.2)$$

本研究では, 次式で定義するネットワークの平均次数を定める.

$$\langle k \rangle = (n-1)\alpha = (n-1) \frac{1}{{}_nC_2} \sum_{k=1}^n a_{ij} \quad (5.3)$$

この値を用いることで, ネットワークが持つリンク数を制約することができる.

### 5.1.2 重み付き評価適応関数の設定

進化的アルゴリズムで最適化する評価関数は式 (5.3) とノード間の隣接行列  $A$  から求まるラプラシアン行列  $L$  の第2最小固有値, 最大固有値である  $\lambda_2, \lambda_n$  との間に重み付けで表す.  $\omega (0 \leq \omega \leq 1)$  は, 適応関数を線形結合するパラメータである. 式 (8.2), 式 (5.5) において,  $\omega = 0$  とした場合は, リンク密度の最小化, 一方で,  $\omega = 1$  とした場合は, ネットワークのラプラシアン行列の固有値に関する関数のみを最小化する問題になる. そしてコンセンサス問題についての最適化を行うための評価関数として,  $\lambda_2$  と式 (5.3) の2つを重み付けした次式で与える.

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\lambda_2} + (1-\omega) \langle k \rangle \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (5.4)$$

コンセンサスの収束性に関する第2固有値と情報の遅延に対するロバスト性に関する最大固有値を考慮した最適化する適応関数は,  $\lambda_2, \lambda_n$  の固有値比率  $Q$  と式 (5.3) の2つを重み付けした次式で与える.

$$E(\omega) = \omega Q + (1-\omega) \langle k \rangle \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (5.5)$$

と定められる.



## 5.2 生成された最適ネットワーク

本研究で生成設計する最適ネットワークは、4.4.2 で述べたように初期ネットワークを生成し、それを初期世代としてネットワークを遺伝的アルゴリズムにより進化させていく。得られた最適ネットワークの構造特徴を解析すると共に、従来ネットワークモデルとの比較を行って、最適ネットワークが目的特性においてどの程度優れているのかを調べていき、その意味を深くみていく。まず従来ネットワークモデルの特性からラプラシアン行列の固有値特性に基づいて以下に述べる。

### 5.2.1 従来ネットワークモデル

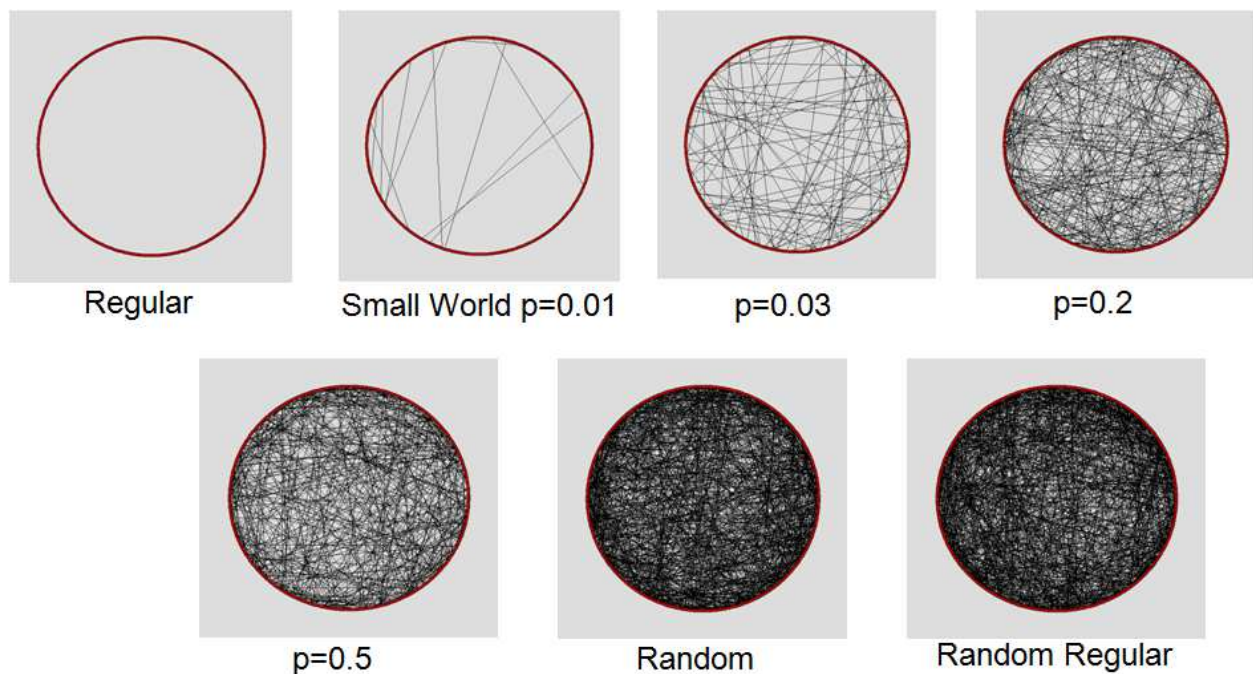


Fig. 5.1: 比較する従来ネットワーク

ネットワークの同期問題で、ラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2$  が高いことはそのネットワークの代数的連結性が高いということであり、同期問題の解への収束性が速い特性をもつネットワークとなる。それに対して有効な従来モデルとしてスモールワールドネットワークがあげられる。従来研究においては、スモールワールドネットワークはレギュラーネットワークよりも収束の速い有効モデルとされている。<sup>5,90,91)</sup>

ノード  $n$  個を輪になるようにつなぎ、 $k$  を偶数として右隣、左隣  $k/2$  までのノードをつないだ近傍のノードとリンクが張られた同じ次数をもつネットワークとしてレギュラーネットワークがある。レギュラーネットワークのようなモデルは  $\lambda_2$  が低く、収束に時間がかかる

ネットワークであるが、スモールワールドネットワークはランダムに選んだノードとのリンク張り替えにより  $\lambda_2$  の値が高くなっていく。確率  $p$  (Small World Link Probability) でリンクの張り替えを行うとして、 $p=0$  のときはリンクの張り替えを全く行わず、もとのレギュラーネットワークのままである。  $0 \leq p \leq 1$  において、近傍を繋ぐリンクによりクラスタリング係数  $C$  の値がおおきいまま、張り替えられたリンクがショートカットの役割をすることにより、平均経路長  $L$  の値が急激に小さいスモールワールドとなる。スモールワールドネットワークは  $p$  が大きくなるにつれてより代数的連結性が高いネットワーク特性をもつようになる。そのためレギュラーネットワークよりも収束の速いネットワーク特性をもつようになる。

そして  $p=1$  のときはすべてのリンクを張り替えることになり、ネットワークはランダムネットワークとなる。ランダムネットワークや  $p$  が 1 に近いスモールワールドネットワークは代数的連結性が  $p$  の値に中において高い特性を示し、収束の速さはレギュラーネットワークと大きな違いがでることになり、速い収束特性を示すネットワークとなる。

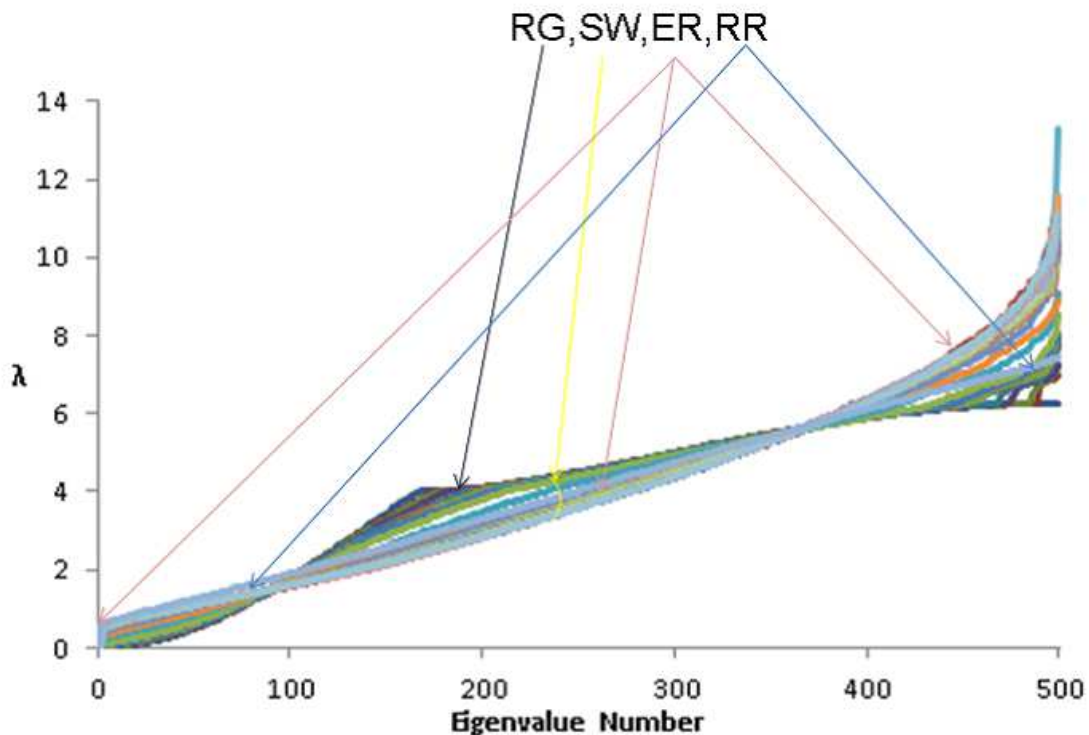


Fig. 5.2: 従来モデルのラプラシアン行列の固有値推移

そしてさらなる高い代数的連結性をもつネットワークモデルとしてランダムレギュラーネットワークがあげられる<sup>42) 45) 92)</sup>。ランダムレギュラーネットワークは、レギュラーネットワークのように全てのノードの次数が同じであるだけでなく、ランダムネットワークのようにそれぞれのノードからのリンクがランダムに張られている。そのためレギュラーネットワークは近傍のノードとのみリンクが張られているため、代数的連結性は低い、全次数が同じ且つランダムにリンクが張られることによりランダムレギュラーネットワークの均質性は高く、代数的連結性もより大きくなる。そのためランダムネットワークや  $p$  が 1 に近いス

モールワールドネットワークの代数的連結性も高いが、ランダムレギュラーネットワークはそれらよりも優れた代数的連結性をもつネットワーク構造となる。

これらの従来モデルである比較ネットワーク (Fig. 5.1) とネットワークのラプアシアン行列の全固有値推移 (Fig. 5.2), そして代数的連結性をみるため、ラプラシアン行列の第2最小固有値を比較したものを示す (Fig. 5.3). Fig. 5.2 において, RG はレギュラーネットワーク, SW はスモールワールドネットワーク, ER はランダムネットワーク, RR はランダムレギュラーネットワークを表す. ノード数は500であり, 全固有値の数は500となる。

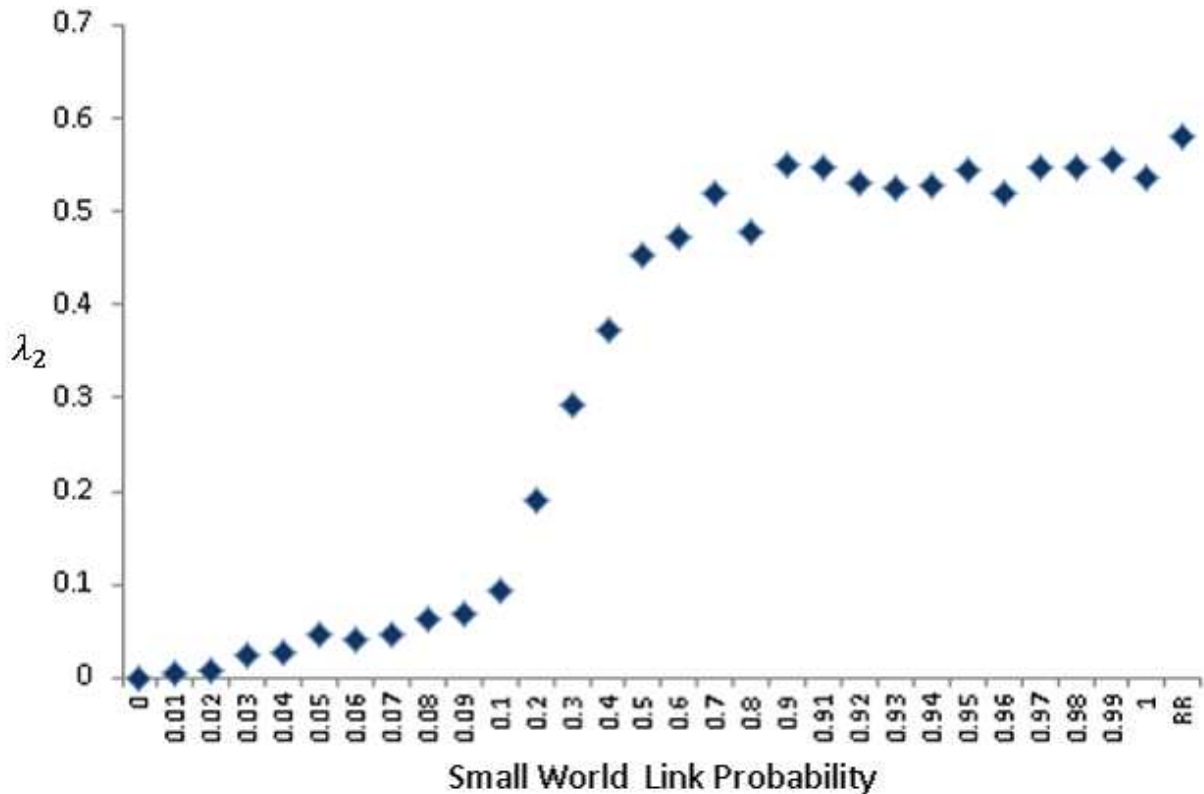


Fig. 5.3: 従来モデルの第2最小固有値の比較

Fig. 5.3 より, レギュラーネットワークは代数的連結性が低く, スモールワールドネットワークは  $p$  が大きくなるにつれてより代数的連結性が高いネットワーク特性をもつようになることが分かる. そしてランダムネットワークや  $p$  が1に近いスモールワールドネットワークは代数的連結性が  $p$  の値に中において高い特性を示し, ランダムレギュラーネットワークはそれらよりも高い代数的連結性をもつネットワークであることが分かる.

### 5.2.2 生成された最適ネットワークと従来ネットワークとの比較

進化生成した最適なネットワークの構造を, Fig. 5.4, Fig. 5.5 に次数分布と併せて示す. 本研究で生成した最適ネットワークがコンセンサス, 同期問題に対してどの程度優れているかをみるために従来モデルとして有効とされるネットワークモデルとの比較を行う. 比較する上でネットワークの平均次数は同等なもので行い, 平均次数は4としている.

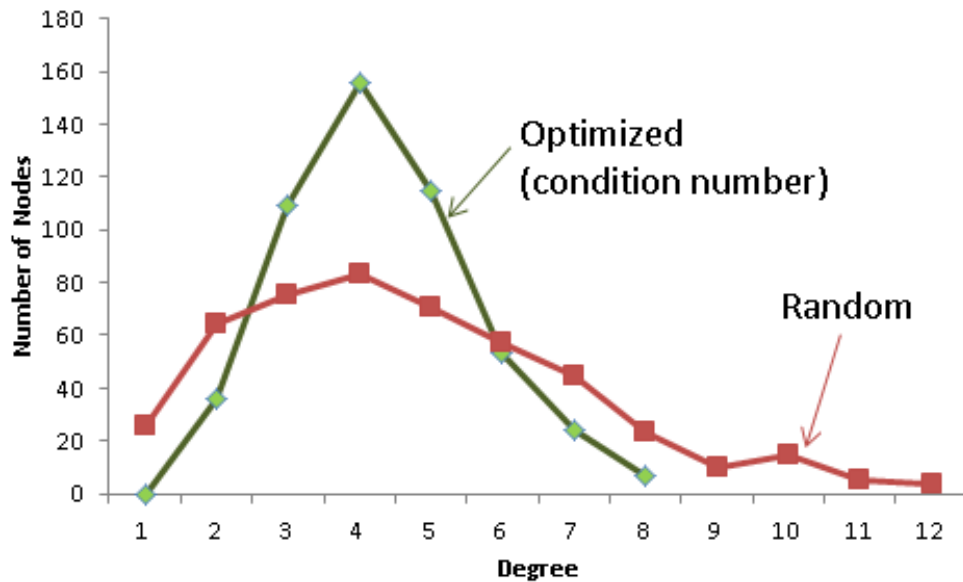


Fig. 5.4: condition number による最適ネットワークとランダムネットワークの次数分布

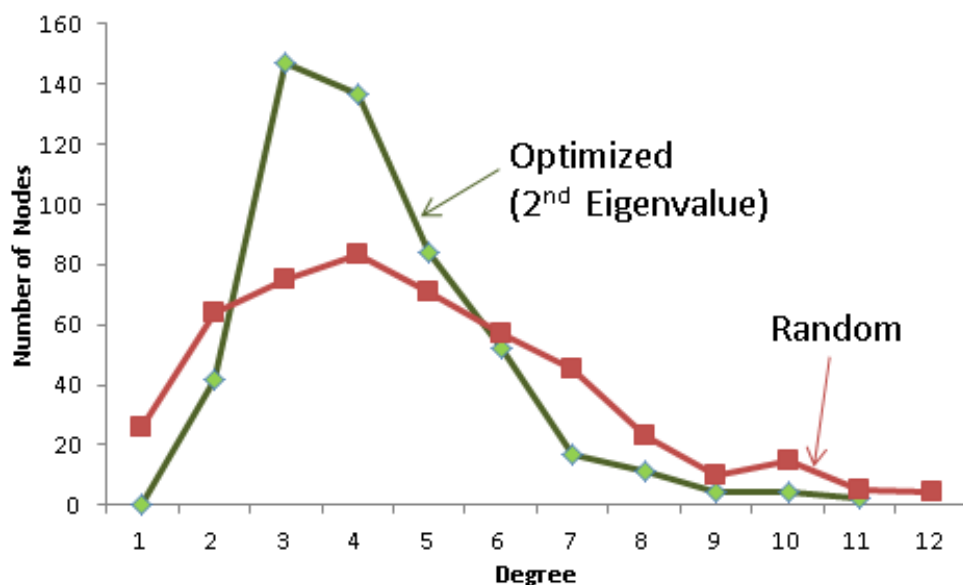


Fig. 5.5:  $\lambda_2$  による最適ネットワークとランダムネットワークの次数分布

Fig. 5.3 より従来モデルの中で，ランダムレギュラーネットワークが最も代数的連結性が高いネットワークであることが分かる．そして進化生成された最適ネットワーク (Optimized) の第2最小固有値との比較をしたものを Fig. 5.6 に示す． $\lambda_2$  による最適ネットワーク (Opt1), condition number による最適ネットワーク (Opt2) 共に従来有効モデルのネットワークよりも大きく優れた代数的連結性をもっていることが分かる．ここで  $\lambda_2$  による最適ネットワークの方が  $\lambda_2$  のみを考慮しているため，代数的連結性は condition number による最適化よりも高くなるとも考えられるが，最大固有値も考慮し，情報遅延ロバスト性とのバランスも兼ね揃えた最適化がより代数的連結性の優れたネットワークが生成されている．

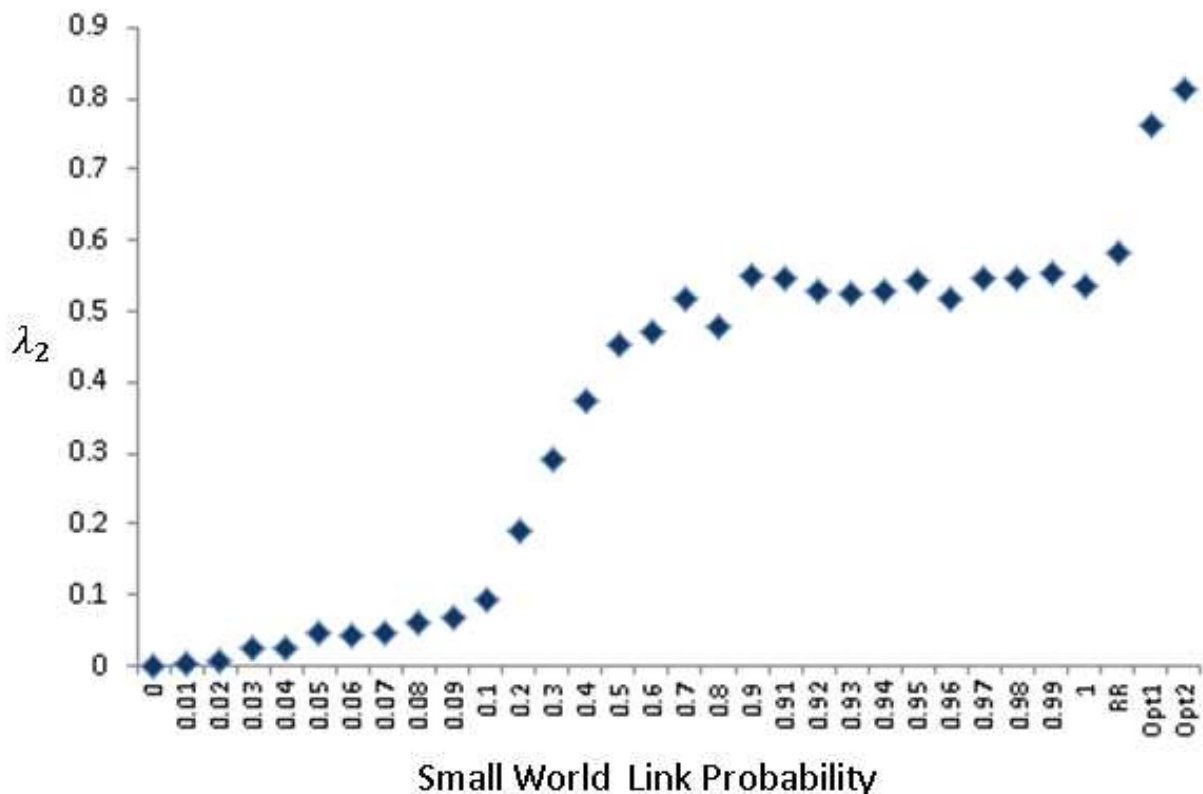


Fig. 5.6: ネットワークの第2最小固有値  $\lambda_2$  の比較

本研究による提案ネットワークが従来モデルのネットワークよりも優れた代数的連結性をもつことは示したが，コンセンサスにおける合意の達成の情報通信遅れに対するロバスト性についても考慮したネットワークについてはラプラシアン行列の最大固有値と関連がある．そのため情報通信遅れに対するロバスト性についても考慮した同期条件が安定となるためにはラプラシアン行列による第2最小固有値と最大固有値による比率  $Q(\text{condition number})$  が小さいほど良いということになり， $Q$  がより小さい特性をもつネットワーク構造がコンセンサス，同期問題においてバランスのとれた優れたものとなる．

ここで各種ネットワークのラプラシアン行列の最大固有値の比較を行ったものを Fig. 5.7 に， $Q(\text{condition number})$  の比較を行ったものを Fig. 5.8 に示す．

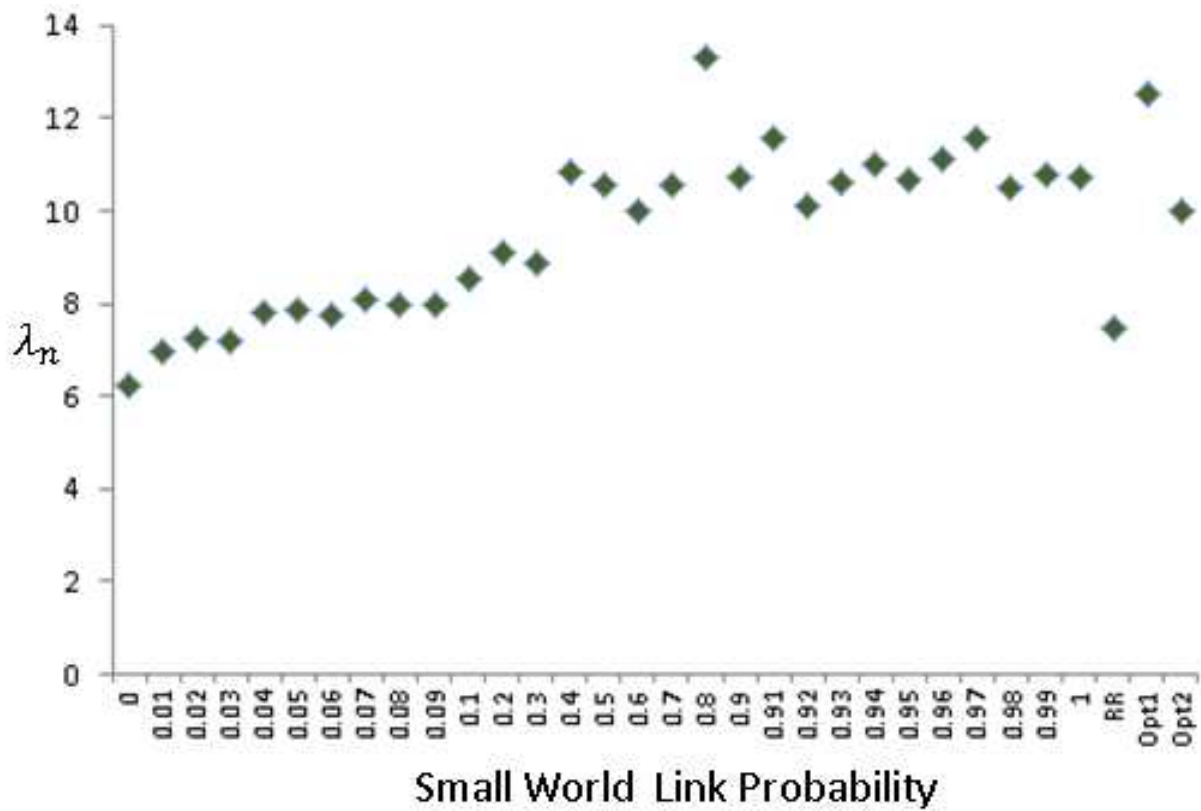


Fig. 5.7: ネットワークの最大固有値  $\lambda_n$  の比較

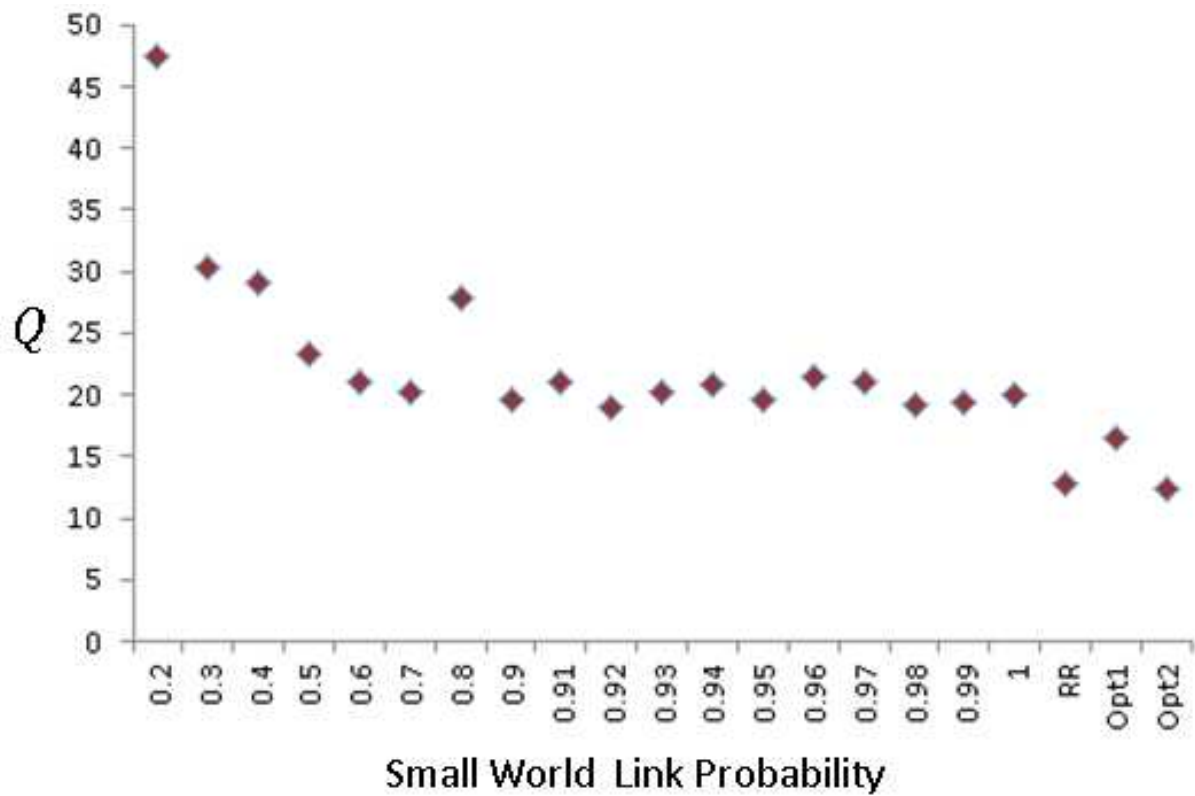


Fig. 5.8: ネットワークの  $Q$ (condition number) の比較



Fig. 5.7 からスモールワールドのリンク確率が上がるにつれて、最大固有値も上がっていくが、ランダムレギュラーネットワークは最大固有値が低い特性を示している。これはランダムレギュラーの全次数が同じであるためにレギュラーネットワークに近い特性を帯びてくるからである。そのため Fig. 5.3 において示したように従来モデルのネットワークの中ではランダムレギュラーネットワークが第2最小固有値も高い特性をもつため、Fig. 5.8 における  $Q$  の値も従来モデルの中で最も低く、コンセンサス，同期問題において優れたネットワーク構造をもっている。しかし，本研究における進化生成最適ネットワークは，Fig. 5.6 で示したようにランダムレギュラーネットワークより高い代数的連結性を持ち，Fig. 5.7 における最大固有値も代数的連結性が高い特性をもつスモールワールドネットワークより比較的小さい値となるよう進化している。その結果，Fig. 5.8 における  $Q$  の値も従来モデルの中で最も低い値をもつランダムレギュラーネットワークよりさらに低い値を持ち，最もコンセンサス，同期問題において優れたネットワークが進化生成されたことが分かる。これにより本研究による提案ネットワークが従来モデルより最も優れた最適なネットワーク構造であることがいえる。

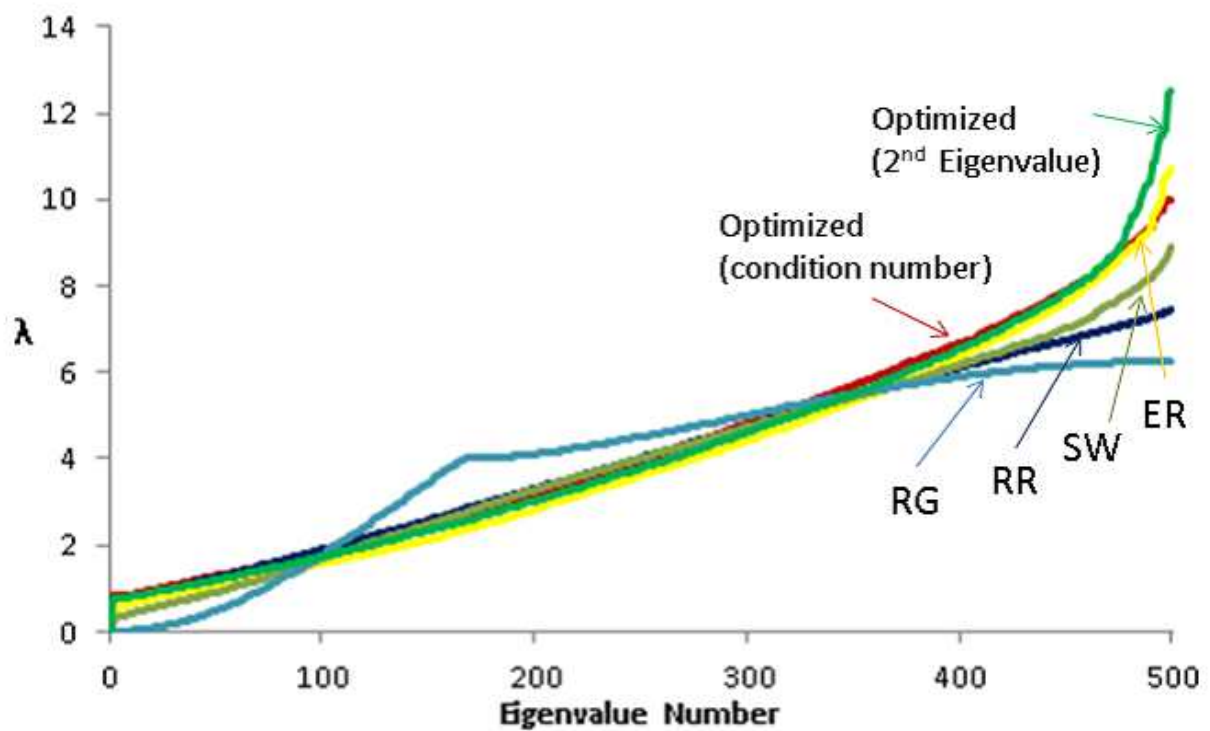


Fig. 5.9: 各ネットワークの固有値推移

これらの固有値特性が全固有値推移からネットワーク特性としてみることができる．レギュラー，スモールワールド，ランダム，ランダムレギュラーネットワーク，最適ネットワーク (condition number, 第2最小固有値最適化) の各ネットワークの固有値推移を代表的な特徴推移として Fig. 5.9 に示す．スモールワールドネットワークは確率によるリンク張り換えによって Fig. 5.3 で示したように代数的連結性が高まってくる．そのためここでは  $p = 0.2$  のリンク確率によって第2最小固有値の高まりの傾斜が急になってきているものをスモールワールドネットワークの代表的な一つとして示す．

第2最小固有値については，最適ネットワークが最も高く，次いでランダムレギュラーネットワーク，ランダムネットワーク，スモールワールド，最も低いのはレギュラーネットワークとなっている．レギュラーネットワークは中間の固有値が高まり変動的であると共に，最大，最小固有値については相対的に低い固有値となっている．スモールワールド (代表として  $p = 0.2$ ) はレギュラーとランダムネットワークの中間的な特性をもっている．ランダムネットワークや最適ネットワークは曲線的に，ランダムレギュラーネットワークは直線的に固有値が推移していき，最大固有値はランダムレギュラーネットワークが最も低い， $\lambda_2$  による最適ネットワークが最も高い値となっている．これは  $\lambda_2$  による最適ネットワークが最大固有値を低める進化を行っていないため，ランダムネットワークを上回る値にまで高まっている．condition number 最適化ネットワークについては比較的小さい値に進化しており，最も高い代数的連結性をもつという特性から，進化生成最適ネットワークがコンセンサス，同期問題においてバランスのとれた優れたネットワーク構造特性を示す  $Q$  の値が最も低くなっている．そのため condition number 最適化ネットワークが従来モデルより最もコンセンサス，同期問題において適したネットワーク特性をもつことがいえる．



### 5.2.3 固有値分布によるスペクトル解析

これまで述べてきたネットワークの固有値特性の推移には、それぞれのネットワークの全固有値の分布をみることでネットワーク特性が現れていることを捉えることもできる。行列の固有値特性に着目した解析であるスペクトル解析において、ネットワークにおける固有値分布をみていくことも重要な特性解析であり、ネットワーク特性を調べるための有効な指標となりうる。

そこでラプラシアン行列の固有値特性に基づいたスペクトル解析からネットワークの特性をみていく。各種ネットワークの固有値分布を以下に示していく。まずは従来ネットワークモデルであるレギュラーネットワーク、スモールワールドネットワーク (代表として  $p = 0.2$ ) ランダムネットワーク、ランダムレギュラーネットワークの固有値分布をそれぞれ Fig. 5.10, Fig. 5.11, Fig. 5.12, Fig. 5.13 に示す。

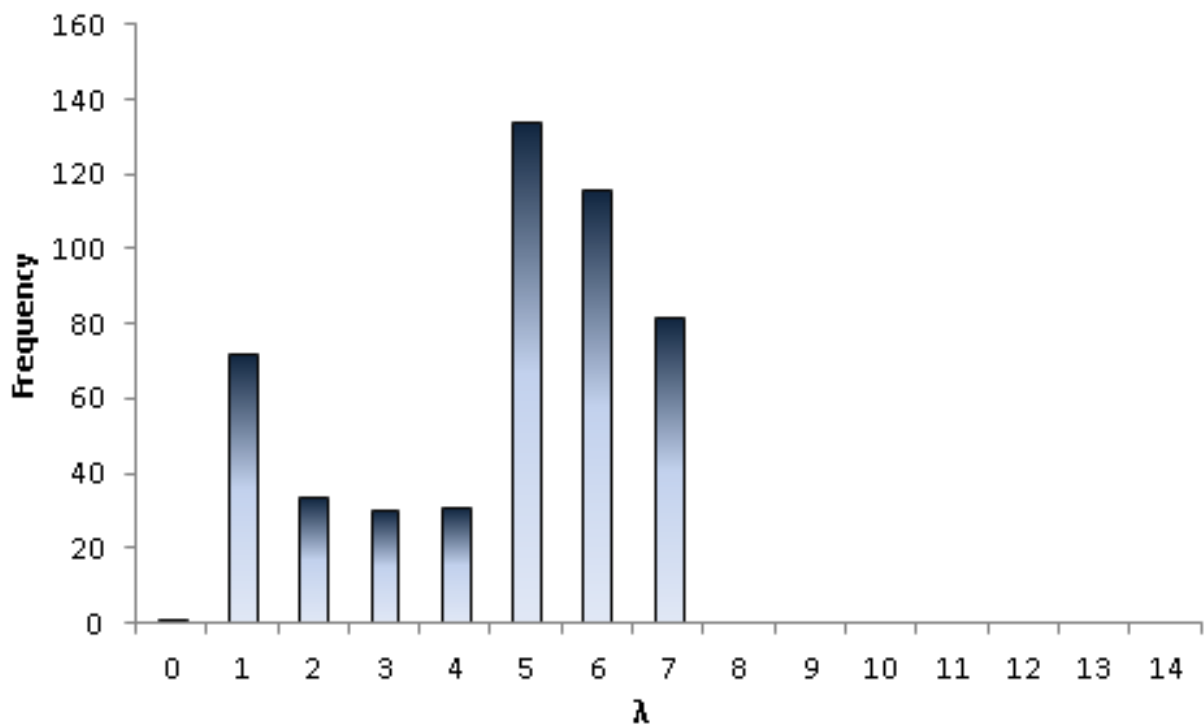


Fig. 5.10: レギュラーネットワークの固有値分布

固有値分布からネットワークの固有値推移の意味がみてとれる。レギュラーネットワークは代数的連結性が低いため、全体的な固有値が低く、推移も急な高まりと変動があり、固有値分布が谷間のように低い頻度とバラツキのある特性となっている。スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) はランダムネットワークとレギュラーネットワークの中間的な固有値推移を示し、固有値分布もレギュラーネットワークで存在した谷間のように低い頻度の固有値が増え、バラツキが少なくなる傾向がある。ランダムネットワークは低い固有値が高い頻度を

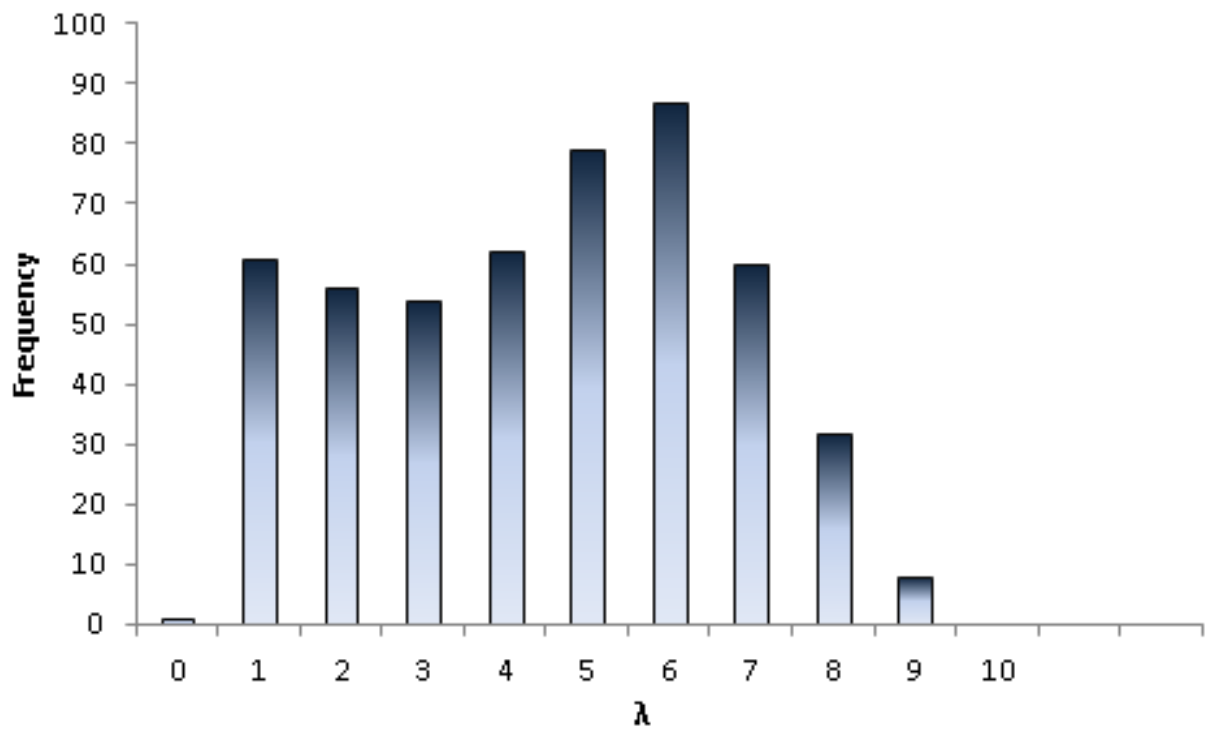


Fig. 5.11: スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) の固有値分布

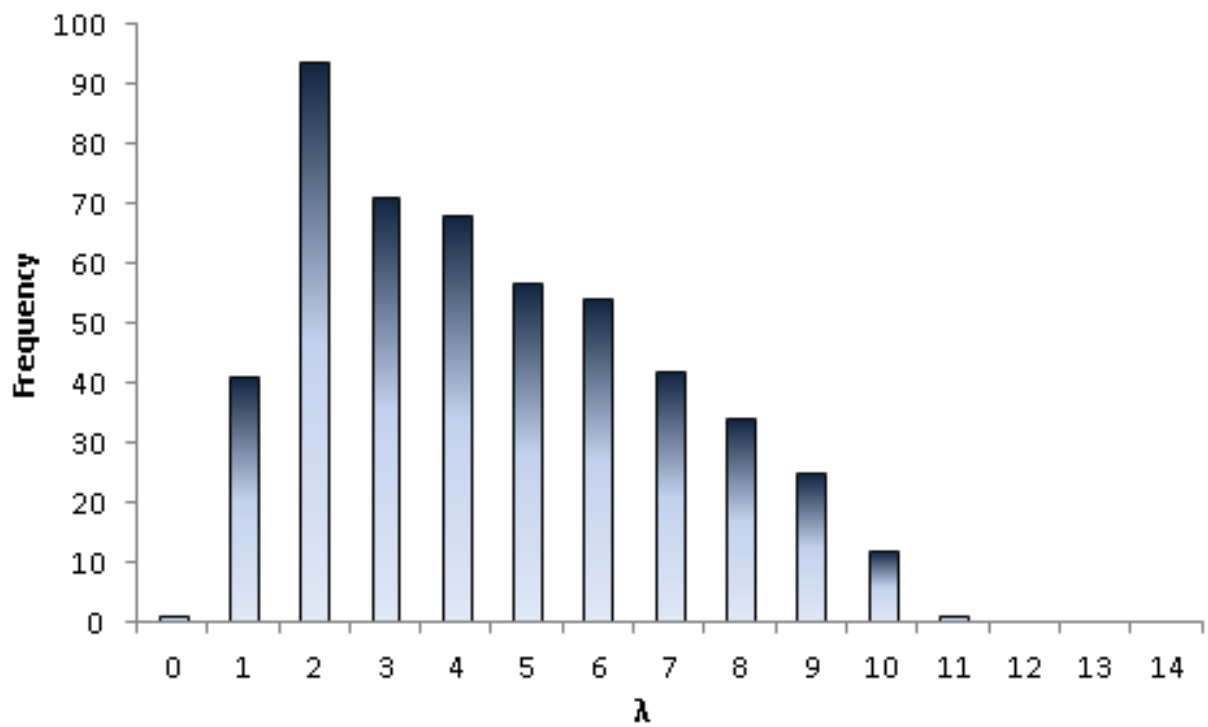


Fig. 5.12: ランダムネットワークの固有値分布

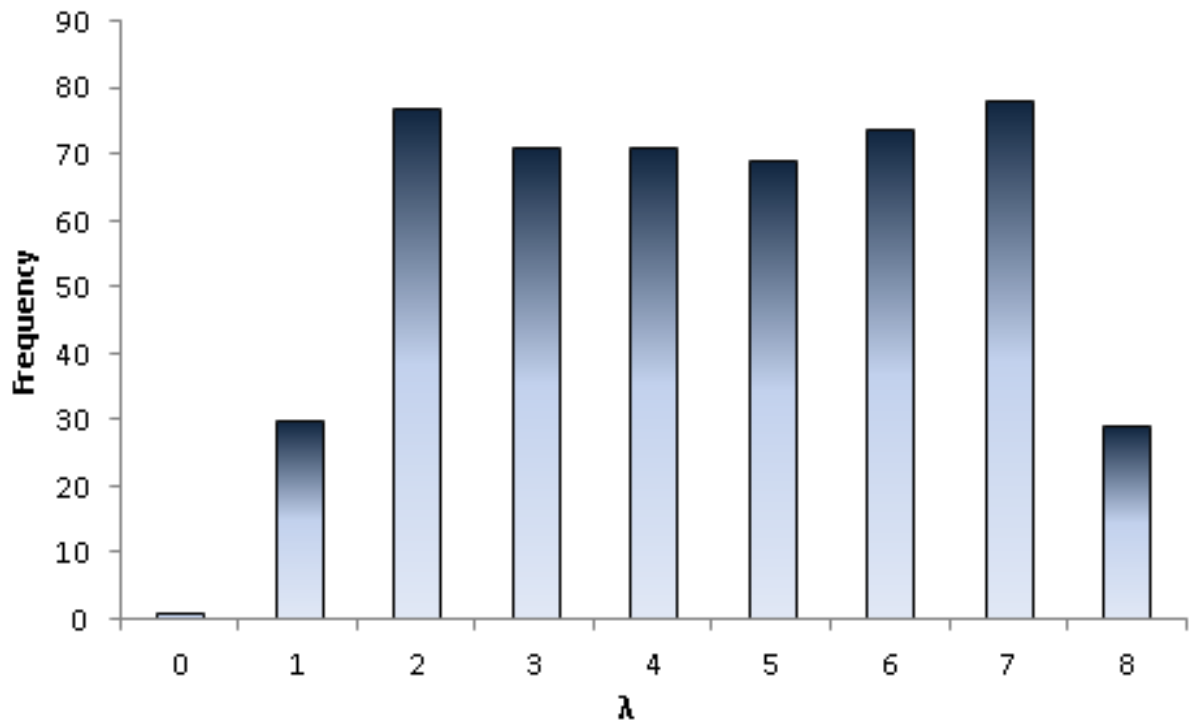


Fig. 5.13: ランダムレギュラーネットワークの固有値分布

示し、固有値が高くなるにつれて数が少なくなる固有値分布特性がある。そのため固有値推移も曲線的なものとなっており、代数的連結性も比較的高めとなる傾向が出る。ランダムレギュラーネットワークは固有値分布も数の差が少なく、均質な特性が現れている。そのため固有値推移が直線的となり、従来モデルでは最も代数的連結性が高く、 $Q$ が低くなる特性をもっている。

続いて最適ネットワークのラプラシアン行列の固有値分布特性によるスペクトル解析を示していく．ラプラシアン行列の第2固有値  $\lambda_2$  の最大化の進化による最適ネットワークを Fig. 5.14, ラプラシアン行列の第2固有値  $\lambda_2$  と最大固有値  $\lambda_n$  を考慮した condition number の最大化の進化による最適ネットワーク Fig. 5.15 に示す．

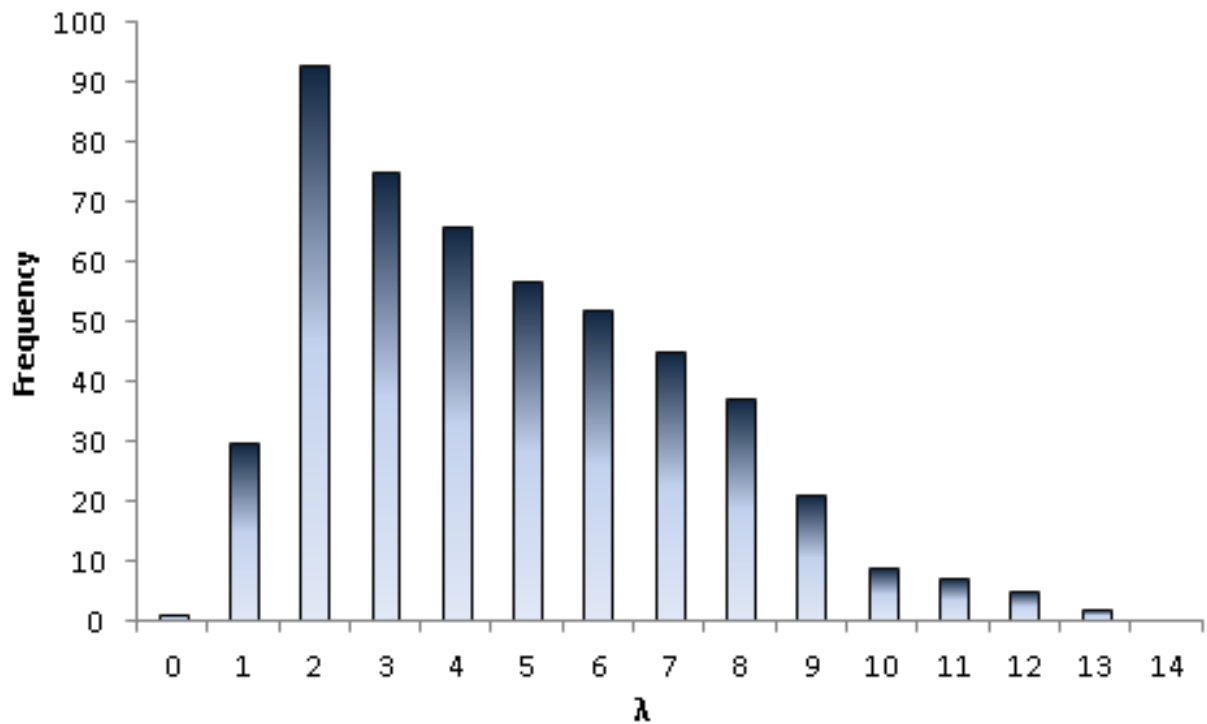


Fig. 5.14:  $\lambda_2$  による最適ネットワークの固有値分布

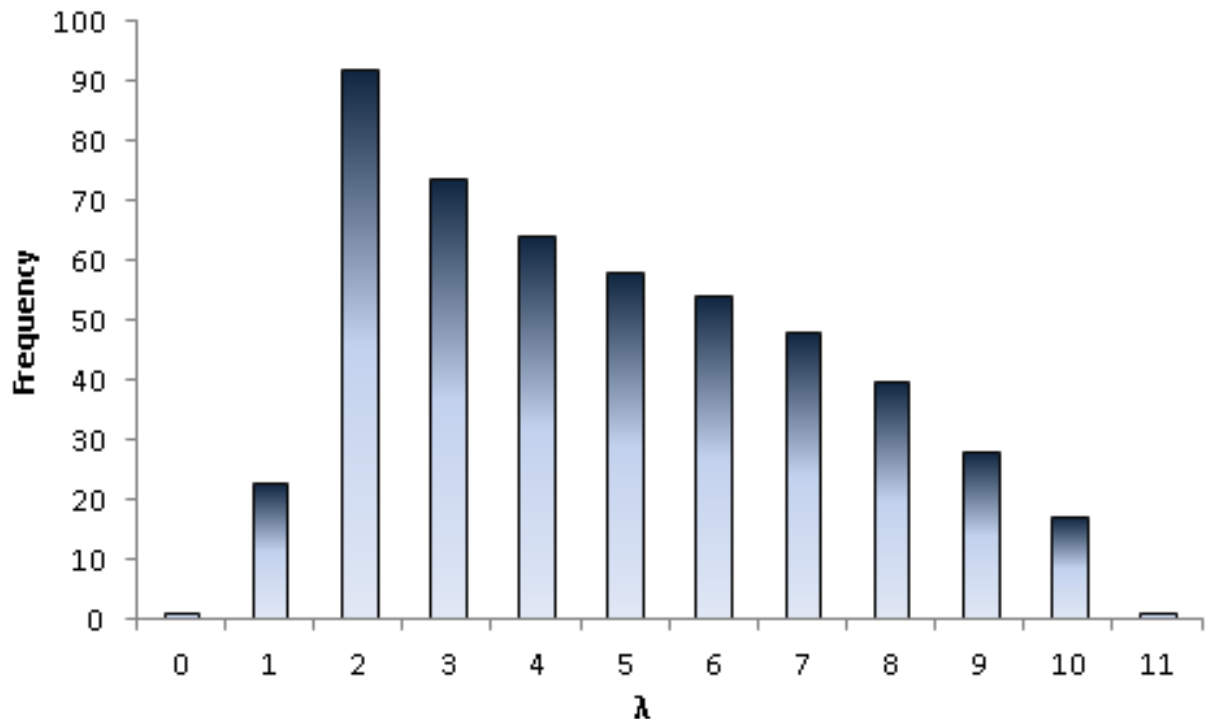


Fig. 5.15: condition number による最適ネットワークの固有値分布

$\lambda_2$  による最適ネットワークは、曲線的な固有値推移を示し、固有値分布はなだらかな傾斜になり、高い固有値ほど少なくなる傾向があるが、最大固有値がより高くなり、固有値の幅が広がる傾向がある。そのため、condition number による最適ネットワークよりも最大固有値が大きく、 $Q$  の値が高いため、condition number による最適ネットワークほど優れた特性は示さない。condition number による最適ネットワークは、曲線的な固有値推移を示し、固有値分布のなだらかな傾斜はランダムネットワークや  $\lambda_2$  による最適ネットワークよりも整った特性があり、最大固有値も比較的低く、固有値の幅も広がり過ぎていない。そのため  $Q$  の値は低く、代数的連結性も高い特性をもち、従来モデルよりも優れた最も収束の速い特性をもつネットワークとなっている。

## 第6章 最適ネットワークとコンセンサス問題の収束性解析

本章においては、進化手法により生成された最適ネットワークのコンセンサスの収束性を比較する。前章までにおいて、得られた最適ネットワークの代数的連結性や condition number の値を従来有効ネットワークモデルと比較、解析を行って、ネットワークの固有値特性から最適ネットワークがより優れた特性をもつことを示した。本章においては、そのコンセンサス、同期の収束を比較して、その理論的な固有値特性と実際の収束値の対応を図る。

### 6.1 コンセンサス問題の収束性比較

これまで示してきた従来ネットワークモデルと進化手法により進化生成した最適ネットワークの比較により、本研究で提案した進化手法最適ネットワークが従来有効とされてきたネットワークモデルよりも代数的連結性、 $Q(\text{condition number})$  がより適した値をもち、コンセンサス、同期問題に対して優れた特性をもつことが分かった。

そしてこれらの特性をもつそれぞれのネットワークが実際にどの程度の収束性を示すかをみるために、それぞれのネットワークの状態 (State) が収束していく過程と、合意が達成し収束が完了する時間であるタイムステップ (Time) の比較を行う。各種ネットワークにおいてノード数は  $n$  として、それぞれのノードの状態 (State) に初期値を次式のようにもたせる。

$$x_i(0) = i \ (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.1)$$

そしてネットワークの収束ダイナミクス過程は、3章においてラプラシアン行列等のネットワーク表現の特性に基づいて、その定式化を行うことができることを述べてきた。ここで3章でみてきたように、ノード間における収束ダイナミクス過程は次式のように記述できる。

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \varepsilon \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{d_{\max}}) \quad (6.2)$$

ここで  $d_{\max}$  は、そのネットワークにおける最大次数である。

そして各ノードの  $n$  体からなる複数のエージェント (ノード) の系に対して、それぞれのエージェントの状態量  $x_i$ , ( $1 \leq i < n$ ) がコンセンサスの収束ダイナミクス過程を経て一定の

値に収束し，合意が達成されるまでに要する収束時間の比較を行う．すなわち，次式が成り立つ状態となるまでである．

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad (6.3)$$

これは全てのエージェントが同じ状態量をもつことであり，それに達するそれぞれのネットワークの収束過程結果を次に示す．

## 6.2 従来ネットワークモデル上での収束性

まずは従来ネットワークモデルであるレギュラーネットワーク，スモールワールドネットワーク（代表として  $p=0.2$ ）ランダムネットワーク，ランダムレギュラーネットワークの固有値分布をそれぞれ Fig. 6.1, Fig. 6.2, Fig. 6.3, Fig. 6.4 に示す．横軸はタイムステップ (Time), 縦軸はネットワークの状態 (State) を表わす．

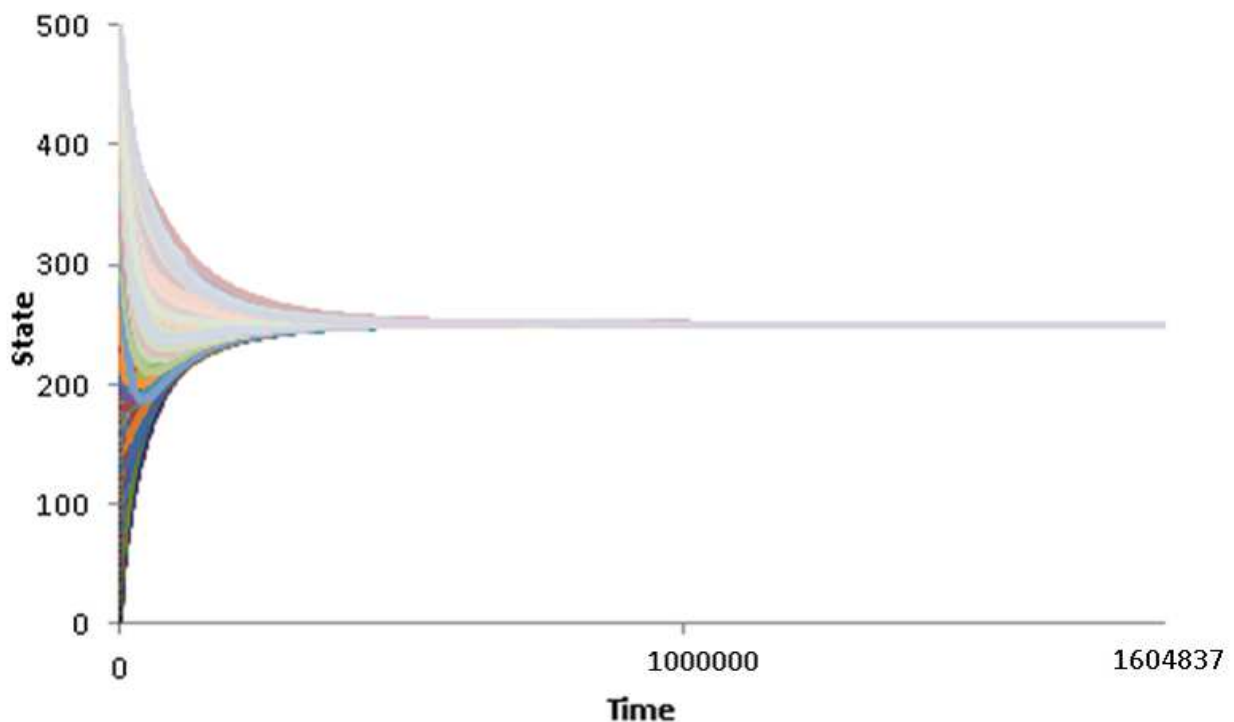


Fig. 6.1: レギュラーネットワークの収束過程

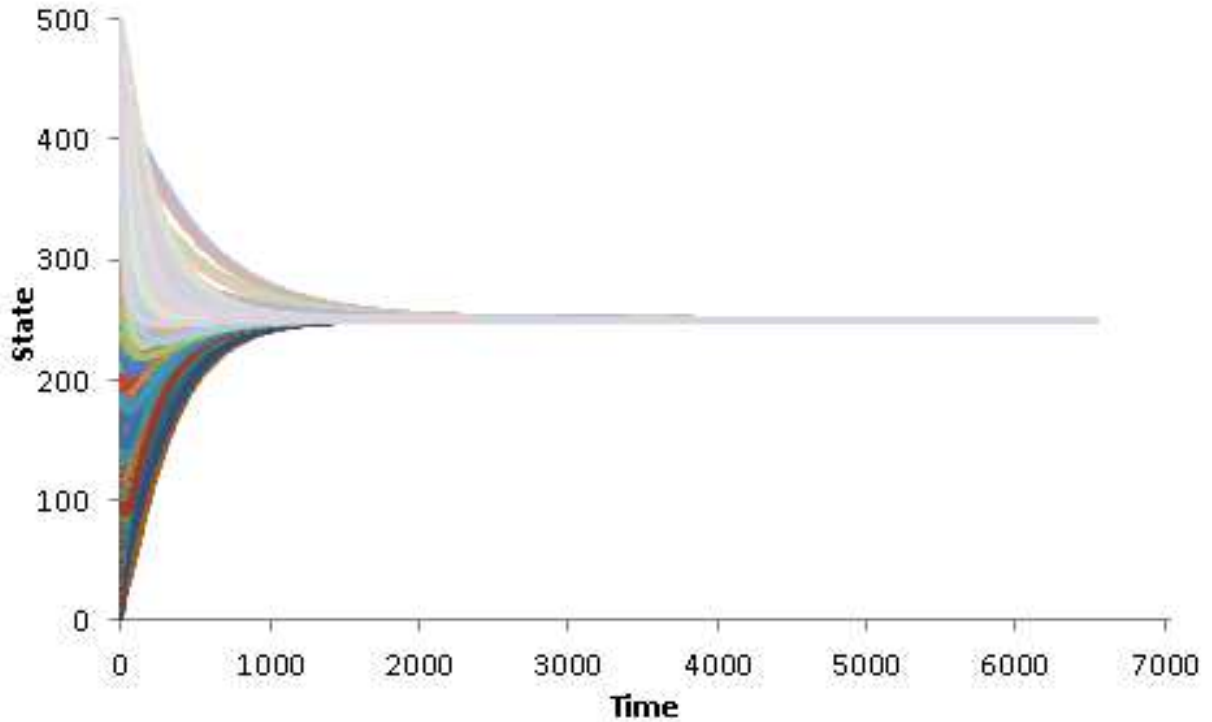


Fig. 6.2: スモールワールドネットワークの収束過程

レギュラーネットワークについては、代数的連結性が極めて低いため、収束には多大な時間を要している。スモールワールドネットワークは  $p = 0.2$  のリンク確率によって第2最小固有値の高まりの傾斜が急になってきているものをスモールワールドネットワークの代表的な一つとして示す。スモールワールドネットワークはレギュラーネットワークと比較して収束時間が大幅に速くなり、 $p = 0.2$  のリンク確率においては、6532 ステップの収束時間となっている。

そして  $p = 1$  のランダムネットワークについては、収束時間が2393 ステップであり、リンク確率  $p$  によるネットワークモデルの中では、収束が速いネットワークとなっている。全てのネットワークの平均次数が同等であるにも関わらず、収束性に大きな差がでることは、様々な分野と関連する同期、コンセンサス問題において、ネットワーク構造がいかに重要であるかを示している。

ランダムレギュラーネットワークはレギュラーネットワークのように全てのノードの次数が同じ且つランダムにリンクが張られており、ランダムネットワークよりもさらに高い代数的連結性をもつため、収束はさらに速くなり、1848 ステップとなる。これによって、ネットワークのラプラシアン行列の固有値特性に対応して、従来ネットワークモデルの中では、実際の収束性もランダムレギュラーネットワークが最も収束が速いことが示された。



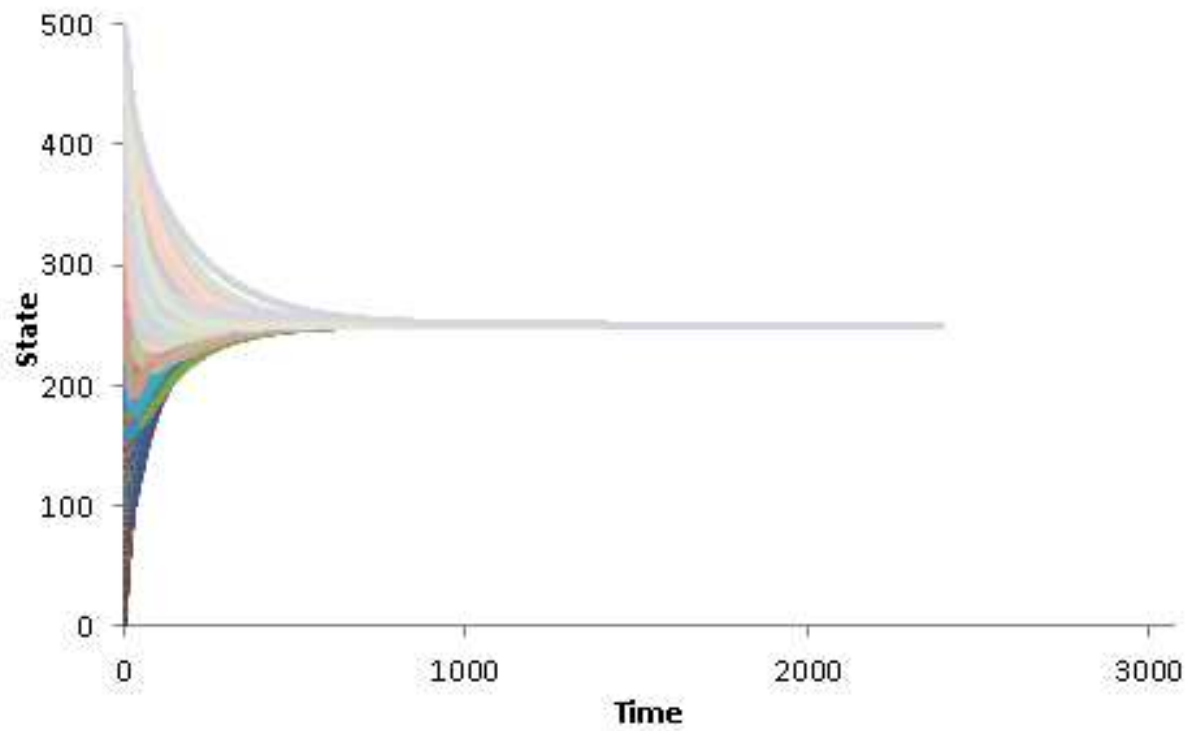


Fig. 6.3: ランダムネットワークの収束過程

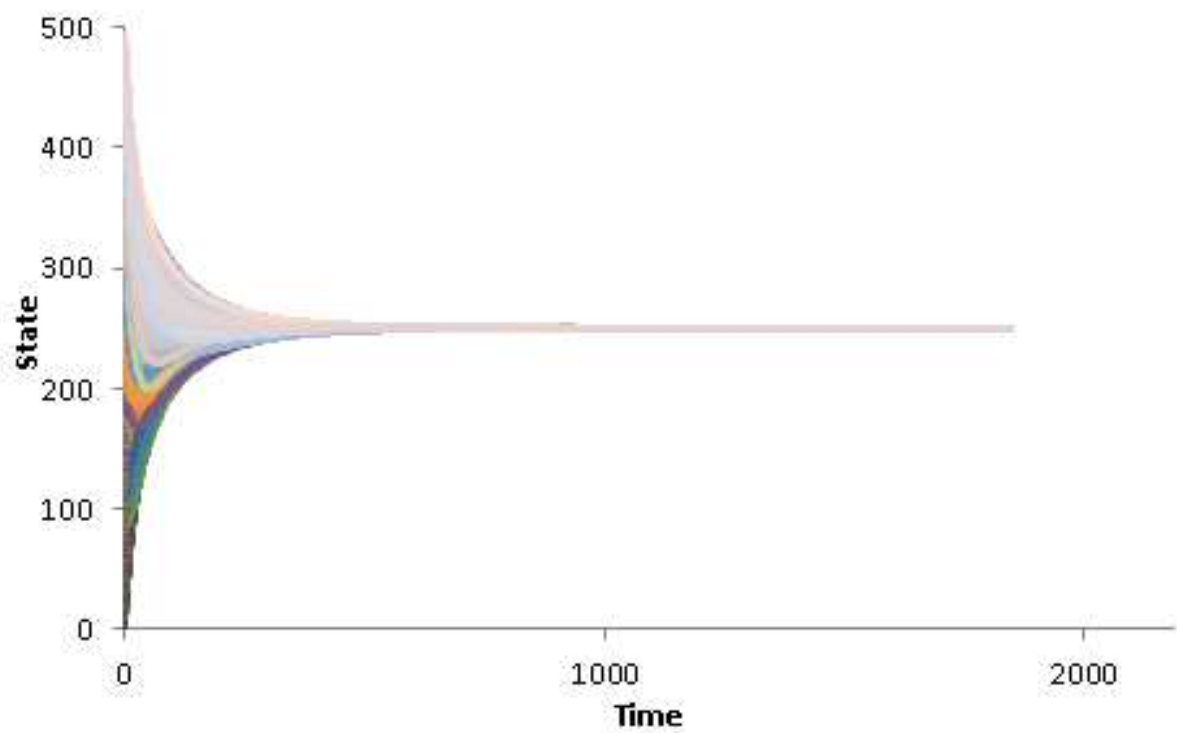


Fig. 6.4: ランダムレギュラーネットワークの収束過程

### 6.3 最適ネットワークの収束性

従来ネットワークモデルに続き，進化手法により得られた最適ネットワークの収束性を示していく．ラプラシアン行列の第2固有値  $\lambda_2$  の進化による最適ネットワークを Fig. 6.5，ラプラシアン行列の第2固有値  $\lambda_2$  と最大固有値  $\lambda_n$  を考慮した **condition number** の進化による最適ネットワーク Fig. 6.6 に示す．

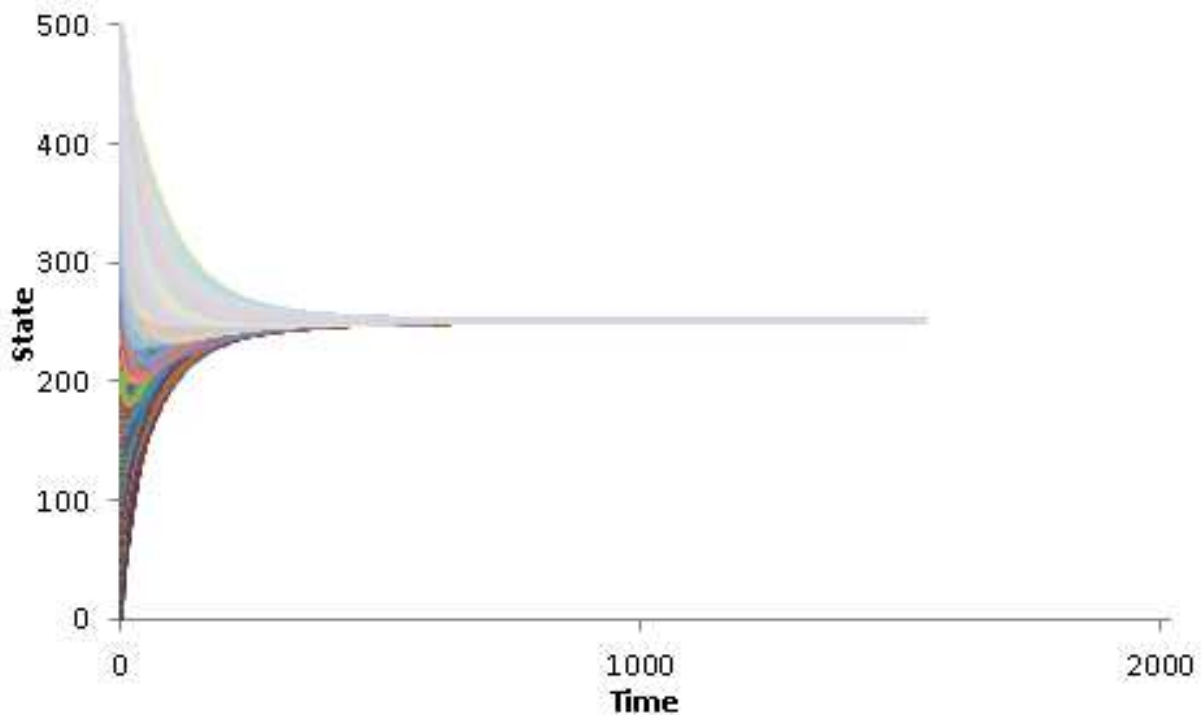


Fig. 6.5:  $\lambda_2$  による最適ネットワークの収束過程

従来ネットワークモデルとして最も収束が速いランダムレギュラーネットワークと本研究で進化生成した最適ネットワークの収束時間を比較すると， $\lambda_2$  による最適ネットワークは1542ステップであり，さらに高速となっている． $\lambda_2$  のみによる最適でも従来モデルで最も収束が速い特性をもつとされるランダムレギュラーネットワークよりも収束が速いネットワークが生成されることが分かった．そして **condition number** による最適ネットワーク1443ステップと  $\lambda_2$  による最適ネットワークよりもさらに高速となっている．これまで検証してきたようにラプラシアン行列の固有値に基づいて，各種ネットワークの代数的連結性をみてきた結果，レギュラー，スモールワールド，ランダム，ランダムレギュラーネットワークの順で代数的連結性が高くなっており，進化手法最適ネットワークはそれらよりもさらに高い代数的連結性をもつことを示した．そして実際の収束時間もそれに対応して，進化手法最適ネットワークが最も優れた収束性をもっている．そして **condition number** による最適ネットワークは最も代数的連結性が高く， $Q$  の値が低いという特性をもち，収束性についても最も優れ

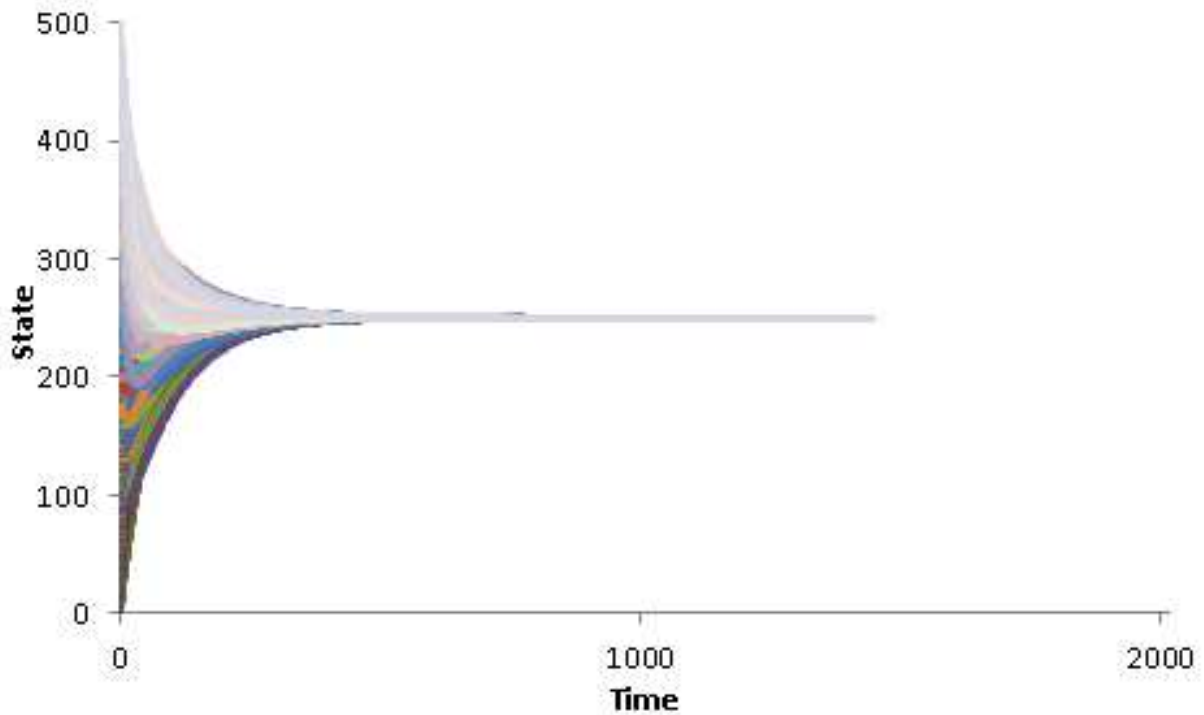


Fig. 6.6: condition number による最適ネットワークの収束過程

たネットワークが生成された。

本研究で進化手法により得られた最適ネットワークは、コンセンサス、同期問題において、スモールワールドネットワークらの従来有効モデルよりも優れた、最適という特性に相応しい優れた収束性をもっている。

このことは、今後、益々役割が大きくなると考えられる効率的なセンサネットワーク構築<sup>59,61,93)</sup> や多数のコンピュータネットワーク構築、多数のエージェントによるロボット、センサーや粒子等を制御する<sup>61,64,65,94,95)</sup> ための問題としても工学的に様々な有効性あるものと考えられる。監視、探索、移動複数ロボットを制御するための分散制御やエージェントの協調制御<sup>5,96-99)</sup> の問題としても重要な特性関連がある。

コンセンサス、同期問題が絡む多くの問題が現実世界に存在することを考えると、その最適なネットワーク設計の意義は、大きいものであると考えられる。従来研究において、コンセンサス、同期問題に対して、どのようなネットワーク構造が優れているかという世界中で多くの研究がなされているテーマに対する有効な手法として、本研究におけるネットワーク構造モデルの有効性と重要性の意義があることがいえる。

以下にこれまで解析してきた各ネットワークの特性及び収束時間を比較してまとめたものを Table 6.1 を示す. 平均次数は同等の値で比較しているため, ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている.

Table 6.1: 各ネットワークの行列の固有値特性と収束性

特性 構造	直径	第2最小固有値	最大固有値	condition number	収束時間
Regular	125	0.0008	6.25	7812.50	1604837
Small World( $p = 0.2$ )	11	0.19	8.88	46.74	6532
Random	8	0.52	10.02	19.26	2393
Random Regular	8	0.58	7.66	13.21	1848
Optimized(2nd eigenvalue)	7	0.76	12.50	16.45	1542
Optimized(condition number)	7	0.81	10.00	12.30	1443

Table 6.1 より, レギュラー, スモールワールド, ランダム, ランダムレギュラーネットワークそして進化手法による最適ネットワークの順で代数的連結性が高くなり, 実際のコンセンサス, 同期問題への収束時間も速くなっている. 進化手法による最適ネットワークが, 従来有効ネットワークモデルよりも代数的連結性とそれに対応したコンセンサス, 同期問題への収束時間に優れており, これまでの従来研究で知られているネットワークモデルよりも有効な提案手法であるといえる. そしてコンセンサス問題は自然界における集団行動や同期現象, 多数のエージェントを制御するための問題としてロボット等の協調制御, 効率的なセンサネットワークの構築設計等, 多様な問題と関連したものである. 様々な諸問題と関連するコンセンサス, 同期問題に対する最適なネットワーク設計の構造の一つとして, 本研究における提案ネットワークは最適な特性をもつネットワークとして, その意義と有効性を示しているものである.

これまでコンセンサス，同期問題に対して有効モデルとされるスモールワールドネットワークやランダムレギュラーネットワークと最適ネットワークとの比較を行ってきた．そして最適ネットワークが特性解析上及び実際の収束過程においても従来モデルよりも優れた特性をもつことを示してきた．

ここでは，複雑ネットワーク研究における代表的なモデルの一つであるスケールフリーネットワーク (SF:Scale-Free Network) のコンセンサス，同期問題の解析を調べ，その特性をみていく．

まず Fig. 6.7 にこれまで見てきた従来ネットワークモデル(レギュラー，スモールワールド，ランダム，ランダムレギュラー)とスケールフリーネットワーク(最大固有値側が大きくなるため一部まで記載)のラプラシアン行列の全固有値推移を示す．

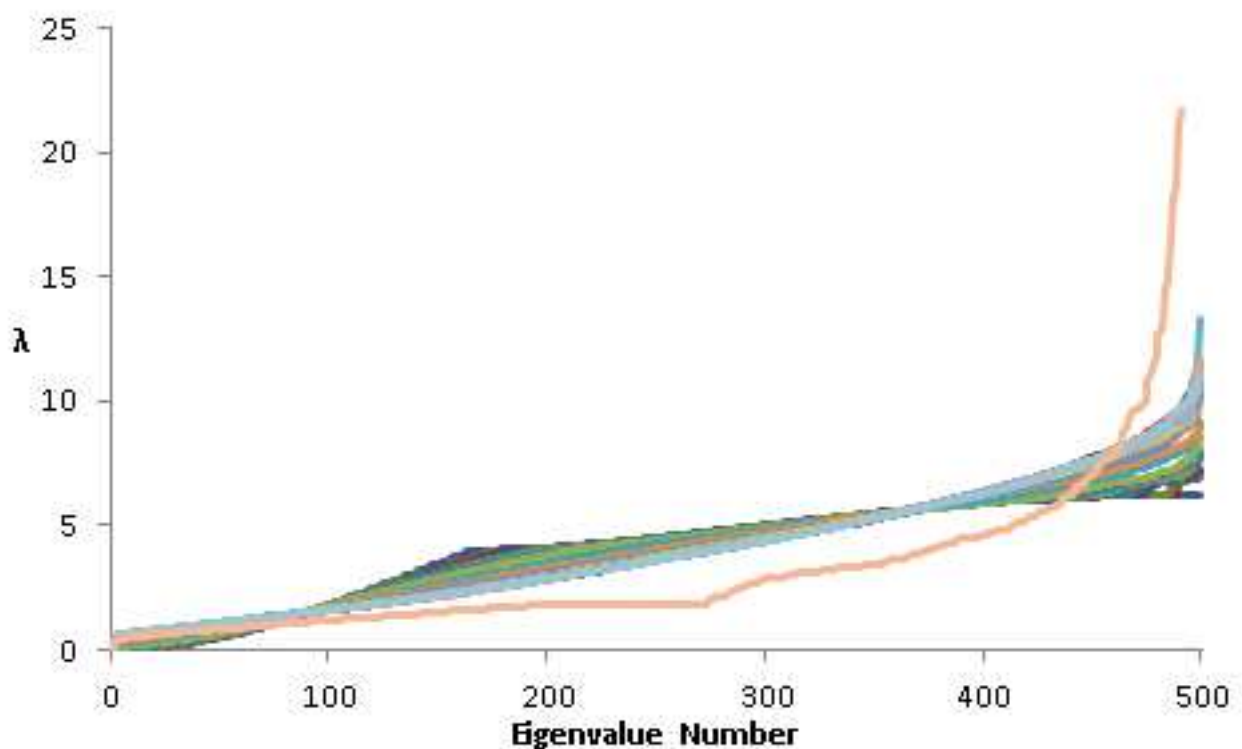


Fig. 6.7: 従来ネットワークモデルとスケールフリーネットワーク (一部) のラプラシアン行列の固有値推移

Fig. 6.7 より，スケールフリーネットワークは，レギュラー，スモールワールド，ランダム，ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って，中間の固有値が一定値(ここでは2)で定まり，最大固有値側に近づくにつれて，その値が非常に高くなる．Fig. 6.7 においては，スケールフリーネットワークの固有値推移において中間の固有値が一定値であること及び従来モデルとの比較を行うため一部まで固有値を示したが，Fig. 6.8 に最大固有値も含めたスケールフリーネットワークの全固有値と従来ネットワークモデルによる全固有値推移を示す．Fig. 6.8 より最大固有値側に向かう程，スケールフリーネットワークは固有値が大きなものになることが分かる．そして，最大固有値側に近いほど急に固有値が上昇していき，同等のリンク数にも関わらず，ネットワーク固有値特性差が異なることが，ネットワークの固有値推移からよく現れている．

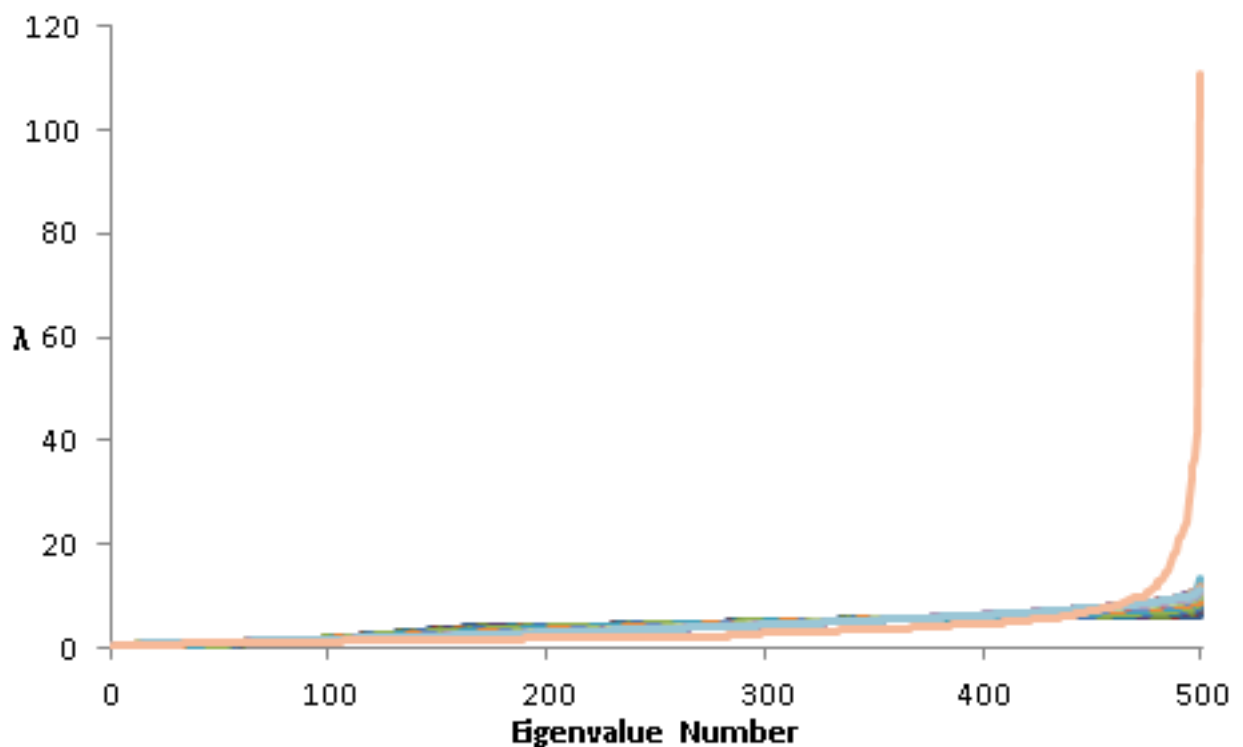


Fig. 6.8: 従来ネットワークモデルとスケールフリーネットワークのラプラシアン行列の固有値推移

スケールフリーネットワークのこのような特性は、ネットワークの全固有値の分布をみることでネットワーク特性が現れていることを捉えることもできる。ラプラシアン行列の固有値特性に基づいたスペクトル解析において、スケールフリーネットワークにおける特性を示したものを Fig. 6.9 に示す。

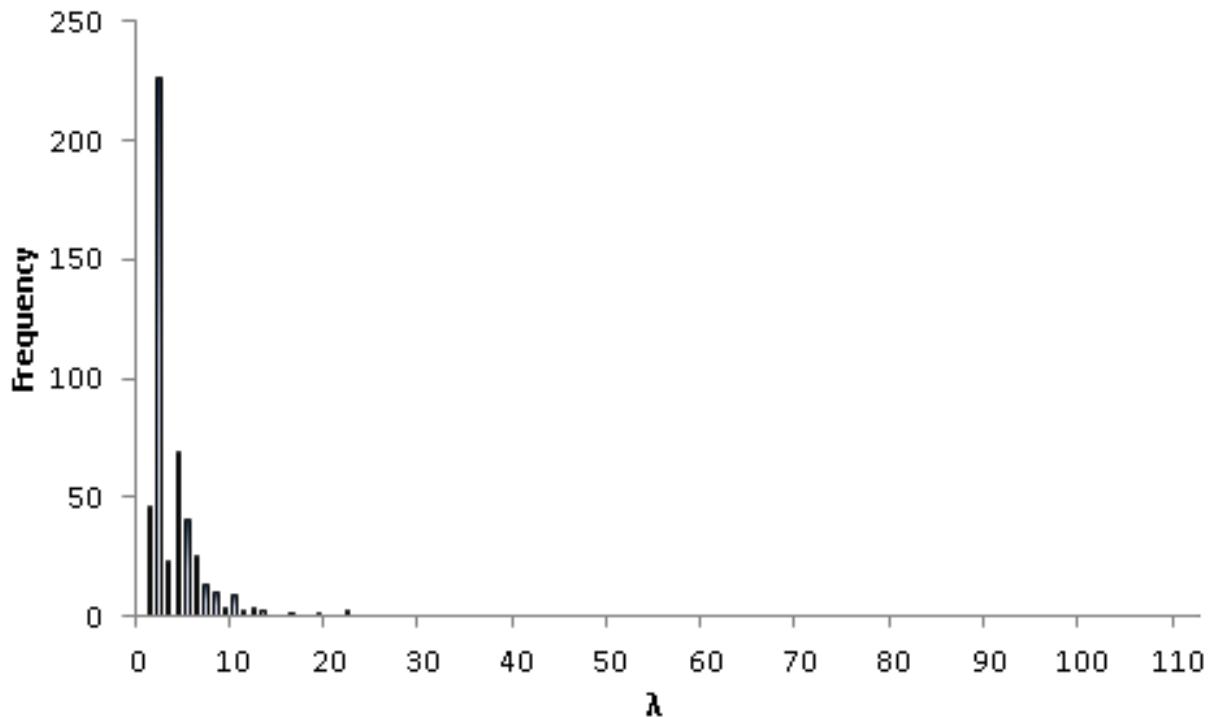


Fig. 6.9: スケールフリーネットワークの固有値分布

Fig. 6.9 より、比較的小さい値となる固有値の数は多く、全体における占める割合は高いが、固有値において最も高い値を示す固有値は数が少なく、最大固有値は突出して高いものとなっている。このような特性は、スケールフリーネットワークの次数分布におけるべき分布を考慮することにより、相関が取れる特性とも考えられる。スケールフリーネットワークは、少数のリンク数しかない多数のノードと、多数のリンクをもつハブとしての性質のあるノードが一部存在する。そのようなハブノードの存在が、ある程度代数的連結性を高める特性もあるが、それと共に最大固有値も大きくなる特性がある。そのため、コンセンサス、同期問題に対して有効とされる従来モデルの一つであるスモールワールドネットワークやランダムネットワークにある程度近いレベルの代数的連結性の高さをもつようになるが、最大固有値が高いため、情報遅延に対するロバスト性はかなり低いものになってしまう。そのため、第2最小固有値、最大固有値の双方がバランスの良い値をもつスモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークの方がより優れたネットワークモデルとして従来研究の中でも挙げられることになる。しかし、ハブノードの存在が代数的連結性を高め、condition number の値もレギュラーネットワークのような高い condition number の値をもつ

モデルよりは、ある程度低いレベルにまで達する．そのためレギュラーネットワークのようなモデルと比較するとスケールフリーネットワークはコンセンサス，同期問題に対して、ある程度のレベルでやや優れた特性があるといえる．

Fig. 6.10 にスケールフリーネットワークの収束過程を示す．収束完了時間は2240であり、ハブノードの存在がある程度代数的連結性を高めるため、ある程度の収束の速さをもっている．しかし、ランダムレギュラーネットワークよりも収束は遅く、ランダムレギュラーネットワークは情報遅延に対するロバスト性も高いことを考えると、スケールフリーネットワークは、ランダムレギュラーネットワークよりも収束性の速さ、情報遅延に対するロバスト性の双方の特性で劣ることになる．だが、レギュラーネットワークのような高い **condition number** の値をもつモデルよりは、ある程度低いレベルにまで達し、一定の代数的連結性の高さをもつため、スケールフリーネットワークはコンセンサス，同期問題に対してレギュラーネットワークのようなモデルと比較すると、ある程度のレベルでやや優れた特性があるといえる．

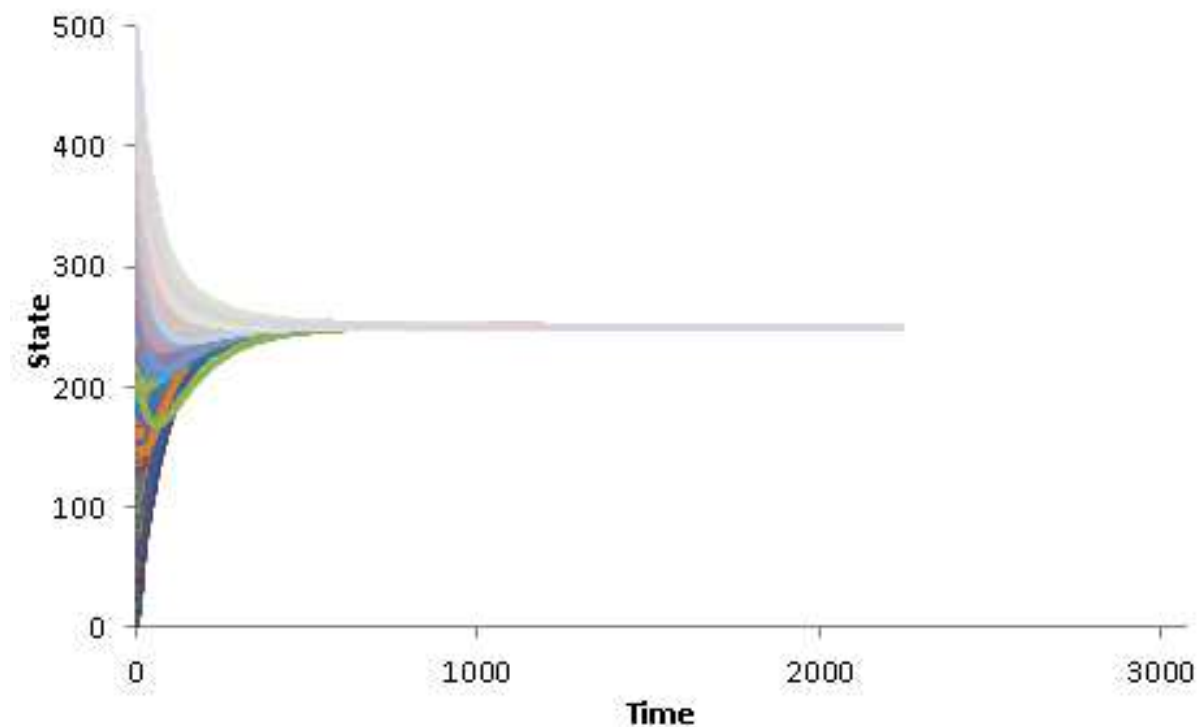


Fig. 6.10: スケールフリーネットワークの収束過程



解析してきたスケールフリーネットワークの特性及び収束時間を比較してまとめたものを Table 6.2 を示す. 平均次数はこれまで取り上げてきた従来ネットワークモデルと同等の値で比較しているため, ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている.

Table 6.2: スケールフリーネットワークの固有値特性と収束性

特性 構造	直径	第2最小固有値	最大固有値	condition number	収束時間
Scale Free	6	0.49	111.03	226.59	2240

このようなことから, 従来ネットワークモデルで代表的なものの一つであるスケールフリーネットワークは, 従来研究で最も優れたモデルであるランダムレギュラーネットワークよりコンセンサス, 同期問題に対しては劣るものであるといえる. そしてランダムレギュラーネットワークよりも本研究で進化手法により提案したネットワークが, コンセンサス, 同期問題に対してより優れたものであることをこれまで示してきた. よって, 本研究で生成設計した最適ネットワークが, これまで研究されてきた従来ネットワークモデルよりも最も優れた特性をもつことを結論づけすることができる.

## 6.4 ネットワーク規模によるコンセンサスへの影響

固有値推移や固有値分布特性をみていく上でネットワークのノード数が多いことは、その解析する絶対量の増大に繋がるため、統計的にも有効である。そしてこれまでの解析を 500 ノードにより行うことで、500 の固有値推移や固有値分布の解析を行ってきた。ネットワークの規模が 100 ノードの場合でもある程度の固有値特性は現れるが、特性の安定性と統計的な有効さから 500 ノードによりこれまでの解析を示してきた。それにより進化手法による最適ネットワークが、従来有効ネットワークモデルよりも優れた特性をもつことが分かったが、ネットワーク規模によって収束性の違いが生じるかどうかをここでは解析する。収束に時間のかかるネットワークと収束の速いネットワークは、ノード数の大小によって、どの程度の影響量があるかをみていく。

ネットワーク規模による収束性比較の設定として、100node と 500node によるネットワーク規模の比較を行う。ネットワークの規模の大小によるコンセンサス、同期問題の収束性への影響を調べるため、これまで取り上げたネットワークモデルの中で、代数的連結性の最も高い最適ネットワーク (condition number による最適化) とそれが低いレギュラーネットワークの比較を行う。

Fig. 6.11 にレギュラーネットワーク (100node)、Fig. 6.12 に condition number による最適ネットワーク (100node) のコンセンサス、同期問題に対する収束過程を示す。ネットワークの平均リンク数は固有値等のネットワーク特性比較の妥当性保証のため同等の 4 により行っている。

Fig. 6.11 より、レギュラーネットワーク (100node) のコンセンサス、同期問題への収束時間は 56093 ステップであり、時間はかかるものの、レギュラーネットワーク (500node) の 1604837 ステップと比較すると大きな差がある。ネットワークの規模が大 (500node) の場合は、ラプラシアン行列の第 2 最小固有値が 0.0008 であり、ネットワークの規模が小 (100node) のケース 0.019 よりもさらに小さい値となる。収束時間もそれに対応して多大な時間も要することになる。同じリンク数で、構造も同じレギュラーネットワークであってもそのネットワークのノード数の規模が大きいと代数的連結性の低いトポロジーのネットワークはさらに収束に時間の要するネットワークとなる。つまりネットワーク構造の設計の仕方によっては、そのコンセンサス、同期問題に対する影響は、ネットワーク規模の変化でも大きな影響が出てくることがいえる。

次に最適ネットワークについてみていく。Fig. 6.12 より、進化手法による最適ネットワーク (condition number) は 100node におけるケースでも収束時間はより速い 907 ステップであり、代数的連結性もより高い。ここで着目したい点は、進化手法による最適ネットワーク (condition number) は 500node における場合でも 1443 ステップであり、100node のケースと比較してもレギュラーネットワークのような大きな収束時間の差は生じないことである。レギュラーネットワークでみてきたようにネットワーク構造の設計の仕方によっては、コンセ

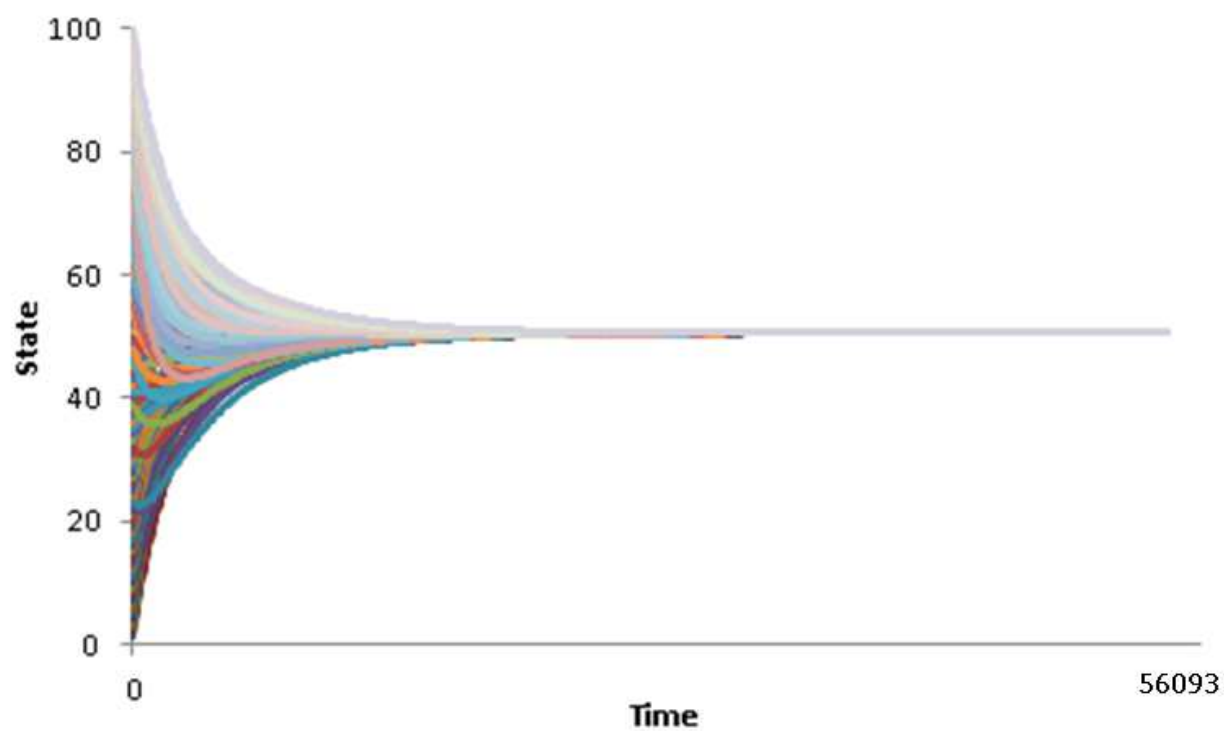


Fig. 6.11: レギュラーネットワーク (100node) の収束過程

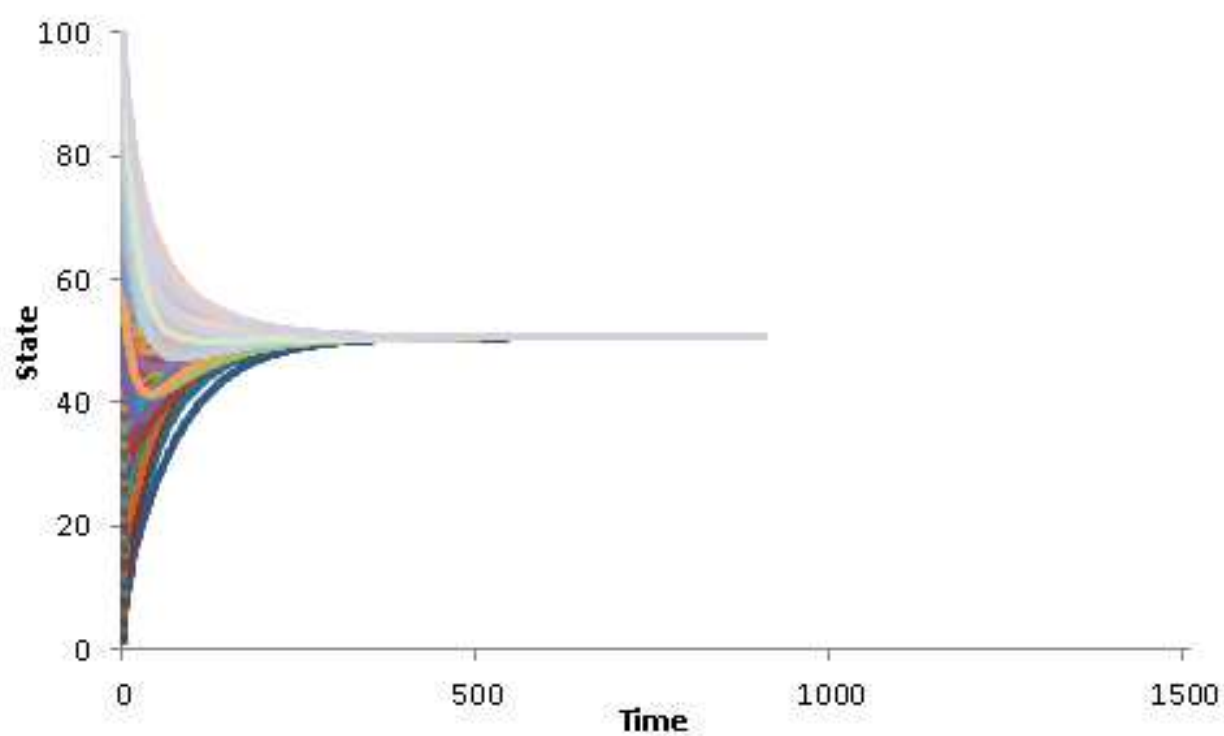


Fig. 6.12: condition number による最適ネットワーク (100node) の収束過程

ンサス，同期問題への収束が非常に遅くなり，ノード数の規模の大小によって，さらに多大な時間を要することにも繋がる．そのことは，多くの問題と関連するコンセンサス，同期問題の応用を考えてもシステム設計上の影響は非常に大きなものとなる．しかし，最適ネットワークは，ネットワーク規模の大小双方のケースにおいて非常に収束性の速い特性をもっておりネットワーク設計上においてもレギュラーネットワークのような問題は生起せず，大きな有効性をそなえることになる．

現実世界における様々なシステムにおいて，その規模が小さいものから大きなものが存在するが，発展していく科学技術の中で，大規模なネットワークや制御システム等の応用分野が数多く存在し，その規模の増大も今後も必須的に予想されることである．そのため，本研究における進化手法による最適ネットワークは，従来有効ネットワークモデルよりもさらに優れた収束性をもつだけでなく，ネットワークの規模の大小によっても収束性に大きな差は生じず，コンセンサス，同期問題の収束時間がノード数の変化によっても非常に速いという特性から，その有効性は大きいものと考えられる．

100node と 500node のネットワーク規模の大小の違いによるレギュラーネットワークと最適ネットワークの特性及び収束時間を比較してまとめたものを Table 6.3 を示す．平均次数は同等の値で比較しているため，ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている．

Table 6.3: 各ネットワークの固有値特性と収束性

特性 構造	直径	第2最小固有値	最大固有値	condition number	収束時間
Regular(100node)	25	0.019	6.24	328.42	56093
Optimized(100node)	5	1.14	8.38	7.34	907
Regular(500node)	125	0.0008	6.25	7812.50	1604837
Optimized(500node)	7	0.81	10.00	12.30	1443

Table 6.3 より，レギュラーネットワークのネットワーク規模の違いによる代数的連結性と収束時間の変化の違いの大きさが読み取れる．最適ネットワークは，ネットワーク規模の大小双方ともにコンセンサスの収束性に非常に優れた代数的連結性と速い収束性をもっている．

## 6.5 推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク

ここでは、3.7節で述べた推移確率行列と正規化ラプラシアン行列の固有値により最適ネットワークの生成設計を行う。これまでの従来研究では、重み付きを考慮しない複雑ネットワーク研究例が多いため、その構造を考えることは重要な意義がある<sup>100-103)</sup>。推移確率行列と正規化ラプラシアン行列の固有値により重み付きの最適ネットワークの生成設計を行い、そのネットワーク構造を探索する。

### 6.5.1 推移確率行列によるネットワーク特性

まず、これより推移確率行列によるネットワーク解析を行う。推移確率行列の固有値特性に基づいて、進化手法による最適ネットワークを生成設計するわけであるが、コンセンサス、同期問題に対して従来有効とされているネットワークモデルとの比較を行う。従来モデルは、5.2章にて説明したネットワークモデルである (Fig. 5.1)。これらの従来モデルである比較ネットワークとネットワークの推移確率行列の全固有値推移を Fig. 6.13 に示す。

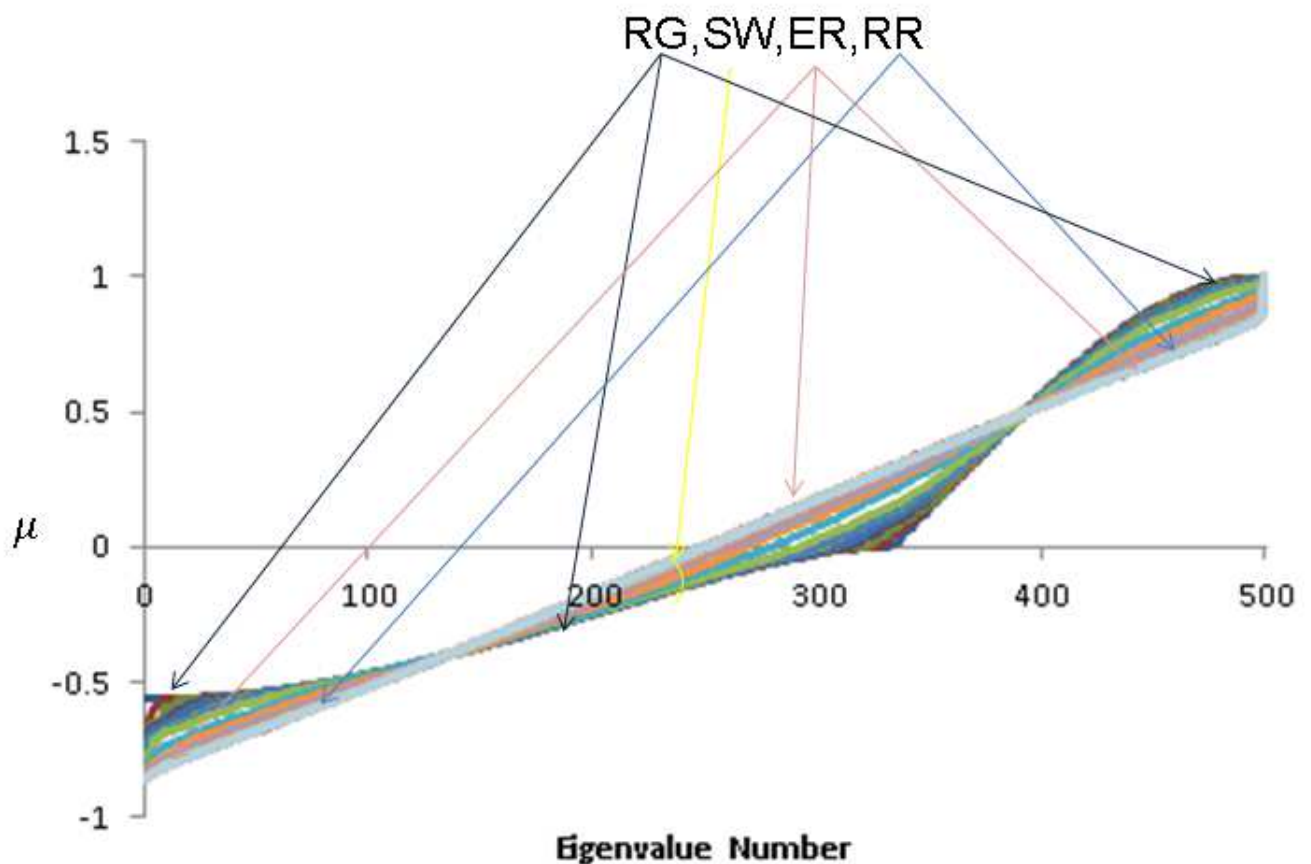


Fig. 6.13: 従来ネットワークモデルの推移確率行列の固有値推移

Fig. 6.13 において, RG はレギュラーネットワーク, SW はスモールワールドネットワーク, ER はランダムネットワーク, RR はランダムレギュラーネットワークを表す. Fig. 6.13 から, それぞれのネットワークにおける推移確率行列の固有値推移特性が現れており, ラプラシアン行列の固有値とは異なる値となっている. 固有値としての推移は,

$$1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \cdots > \mu_n \quad (6.4)$$

として定められる範囲の値で推移している.

そしてラプラシアン行列の固有値特性でもみられたレギュラーネットワークの不規則な推移, ランダムネットワークの曲線的な推移, スモールワールドネットワークにおけるレギュラーネットワークとランダムネットワークの  $p$  による中間的な性質をもつ推移, ランダムレギュラーネットワークの直線的な推移があることが分かる. しかし, その推移していく値はラプラシアン行列の固有値特性とは逆の大きさを推移していく特性があり, ここに正規化された隣接行列としての重み付き (weighted) としてのネットワーク固有値特性が現れている.

### 6.5.2 推移確率行列による最適ネットワークの生成設計

ここでは、5章の節でラプラシアン行列による適応関数を定義したように、推移確率行列の適応関数を定義する．そして適応関数に基づき、進化手法により最適ネットワークの生成設計を行う．進化的アルゴリズムで最適化する重み付き評価関数の設定としては、推移確率行列の第2最大固有値  $\mu_2$  を用いる．3.7節で述べたようにコンセンサス、同期問題の収束性を捉える上で、推移確率行列においては、その第2最大固有値  $\mu_2$  が低いほど収束の速さに優れたものとなる．ラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2$  においては、それが高いほど収束の速さに優れたものとなっている特性があった．

よって、進化的アルゴリズムで最適化する評価関数は式(5.3)と推移確率行列の第2最大固有値  $\mu_2$  との間に重み付けで表す．5章の節のように適応関数を線形結合するパラメータとして  $\omega(0 \leq \omega \leq 1)$  を用い、以下のように適応関数を設定して

$$E(\omega) = \omega\mu_2 + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.5)$$

これにより、リンク密度の最小化と推移確率行列の第2最大固有値  $\mu_2$  を最小化する特性をもった適応関数を定めることができる．

式(6.18)により進化生成した最適ネットワークの次数分布を Fig. 6.14 に示す．

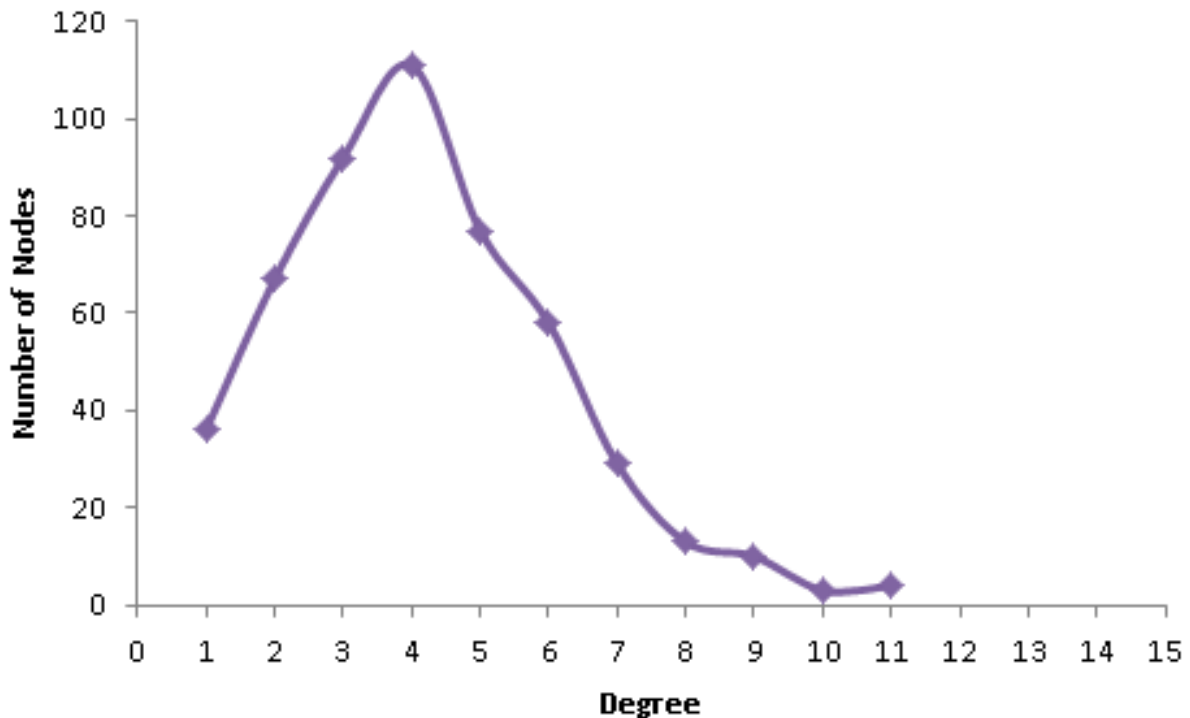


Fig. 6.14: 最適ネットワークの次数分布

そして式(6.18)により進化生成した最適ネットワークの推移確率行列の固有値特性により

従来ネットワークモデルと比較して解析していく．Fig. 6.15に進化生成した最適ネットワークの推移確率行列の固有値推移について従来ネットワークモデルと比較したものを示す．Fig. 6.15より，最適ネットワークは，推移確率行列としての固有値が全体推移として低い値になっており，適応関数式(6.18)により考慮した第2最大固有値 $\mu_2$ を低めるよう進化している．比較する上での平均次数は，従来ネットワークモデルと同等の値で比較しているため，ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている．

そして収束の速さに関わる重要指標である推移確率行列の第2最大固有値 $\mu_2$ について，Fig. 6.16に最適ネットワーク (Opt) と従来ネットワークモデルを比較したものを示す．ここでラプラシアン行列では第2最小固有値をみてきたが，3.7で述べたように推移確率行列では，最小ではなく最大の第2最大固有値が収束性を議論する指標となる．

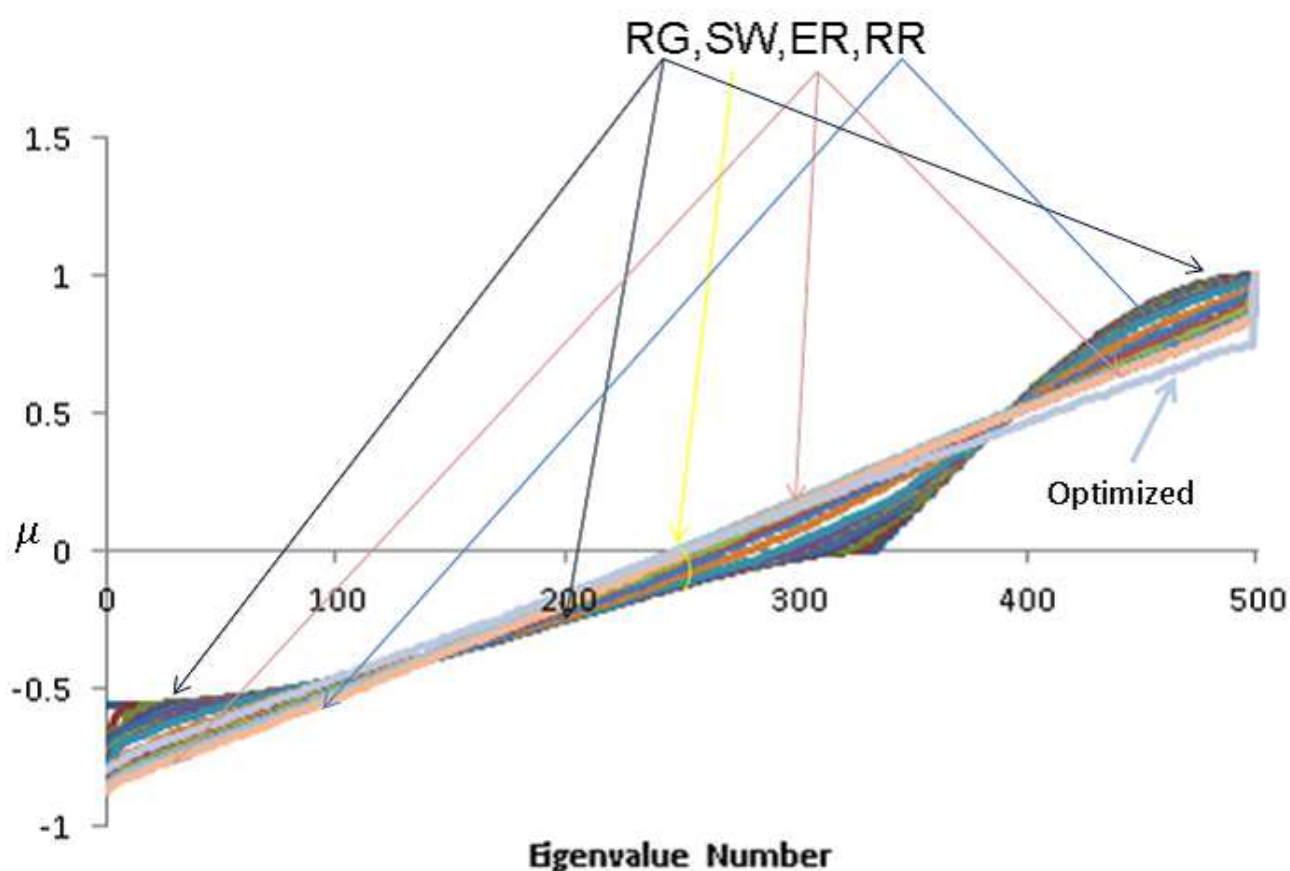


Fig. 6.15: 従来ネットワークモデルと最適ネットワークの推移確率行列の固有値推移



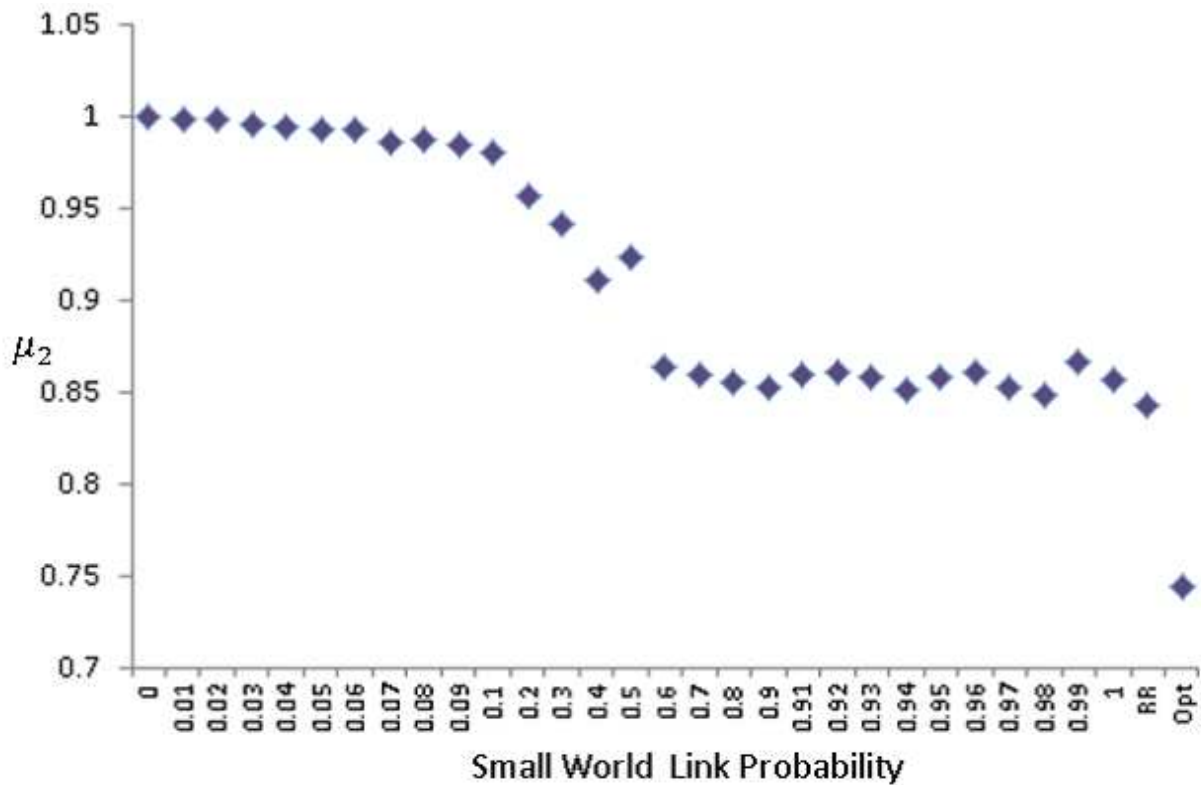


Fig. 6.16: 推移確率行列による従来ネットワークモデルと最適ネットワークによる第2最大固有値の比較

Fig. 6.16 より，従来ネットワークの中ではレギュラーネットワークが第2最大固有値  $\mu_2$  が高く，収束性に適さないネットワーク構造となっている．スモールワールドネットワークは，ランダムリワイヤリングのリンク確率  $p$  が高くなるに従って，第2最大固有値  $\mu_2$  が低くなっていき，レギュラーネットワークよりも収束性に優れた特性が現れている．そしてランダムネットワークや  $p$  が1に近いスモールワールドネットワークの第2最大固有値  $\mu_2$  はかなり低い値となっており，収束が比較的速い構造となっている．従来モデルで最も第2最大固有値  $\mu_2$  が低いのはランダムレギュラーネットワークであり，収束性に最も優れたモデルである．これはラプラシアン行列の固有値特性で解析したものとも対応する特性である．

進化手法により式 (6.18) の適応関数で生成設計したネットワーク (Opt) は，従来モデルで最も優れたネットワークモデルのランダムレギュラーネットワークよりもさらに低い第2最大固有値  $\mu_2$  をもっており，本研究の最適ネットワークが従来モデルよりもさらに優れた最適な特性をもつネットワークであることが分かる．これにより，推移確率行列の特性においても進化手法による最適ネットワークが従来ネットワークモデルよりも優れた最適なネットワークを生成設計できることがいえる．推移確率行列としての特性は，ネットワーク上における Random Walk<sup>75-77)</sup> や Gossip algorithms<sup>55,56)</sup> をはじめ，様々な現象の推移過程を記述する上で用いられている．そのため，本研究の最適ネットワークが従来ネットワークモデルよりも優れた最適特性をもっていることにより，その有効性が示し得る．

推移確率行列の固有値特性の参考として、ラプラシアン行列でも解析した代表的ネットワークモデルの一つであるスケールフリーネットワーク (SF:Scale-Free Network) による推移確率行列の全固有値推移を Fig. 6.17 に示す.

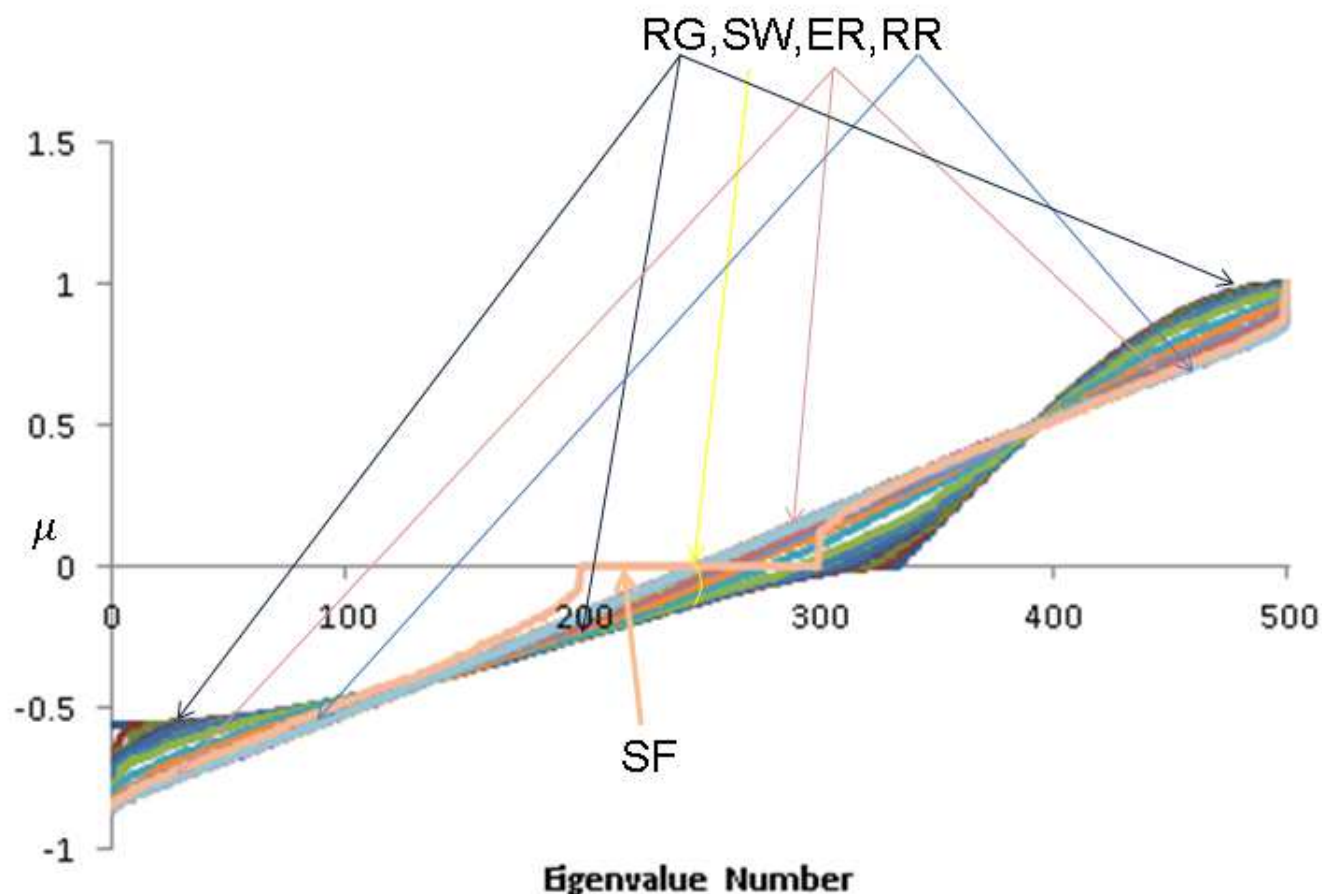


Fig. 6.17: 従来ネットワークモデルとスケールフリーネットワークの推移確率行列の固有値推移

Fig. 6.17 から推移確率行列におけるスケールフリーネットワークの固有値推移特性が分かる. それは Fig. 6.8 においてラプラシアン行列の視点からスケールフリーネットワークを解析した場合とは異なった特性も現れている. ラプラシアン行列の固有値特性においては, スケールフリーネットワークは, 少数のリンク数しかない多数のノードと, 多数のリンクをもつハブとしての性質のあるノードが一部存在することから, 最大固有値が大きくなる特性があった. しかし, 推移確率行列においては, 正規化されている特性から  $1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$  としての固有値の範囲となっている. その中において Fig. 6.7 でも述べたように, スケールフリーネットワークは, レギュラー, スモールワールド, ランダム, ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って, 中間の固有値が一定値の特性があり, 推移確率行列においては, その値が 0 となっている. そして推移確率行列の特性として中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性をもっている. このようなことから, スケールフリー

ネットワーク特性としてラプラシアン行列の固有値推移と共通な特性ももちつつ、正規化された重み付き (weighted) としてのネットワーク特性も包含していることが分かる。

### 6.5.3 推移確率行列の固有値分布によるスペクトル解析

ネットワークの固有値特性の推移には、それぞれのネットワークの全固有値の分布をみることでネットワーク特性が現れていることを捉えることもできる。行列の固有値特性に着目した解析であるスペクトル解析において、ネットワークにおける固有値分布をみていくことも重要な特性解析であり、ネットワーク特性を調べるための有効な指標となりうる。

そこで推移確率行列の固有値特性に基づいたスペクトル解析からネットワークの特性をみていく。各種ネットワークの固有値分布を以下に示していく。まずは従来ネットワークモデルであるレギュラーネットワーク、スモールワールドネットワーク (代表として  $p = 0.2$ ) ランダムネットワーク、ランダムレギュラーネットワークの推移確率行列の固有値分布をそれぞれ Fig. 6.18, Fig. 6.19, Fig. 6.20, Fig. 6.21 に示す。

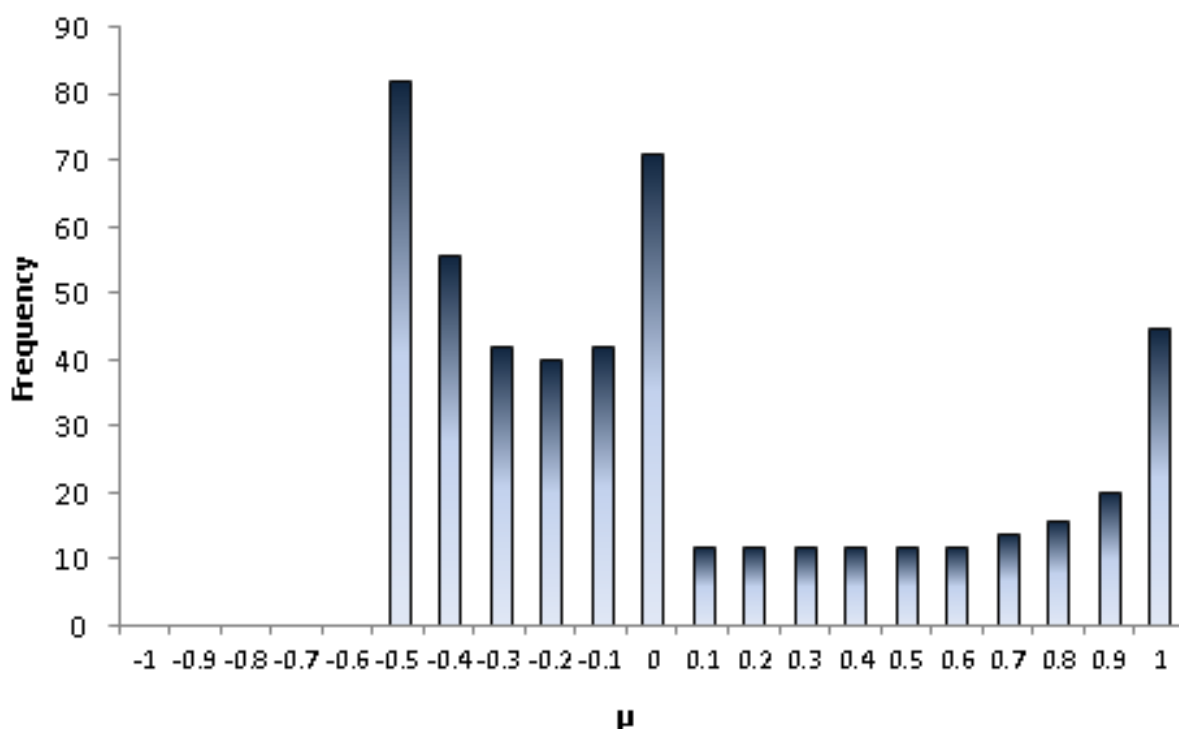


Fig. 6.18: レギュラーネットワークの推移確率行列の固有値分布

固有値分布からネットワークの固有値推移の意味がみてとれる。レギュラーネットワークは代数的連結性が低いため、全体的な固有値が低く、推移も急な高まりと変動があり、固有値分布が谷間のように低い頻度とバラツキのある特性となっている。スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) はランダムネットワークとレギュラーネットワークの中間的な固有値推移

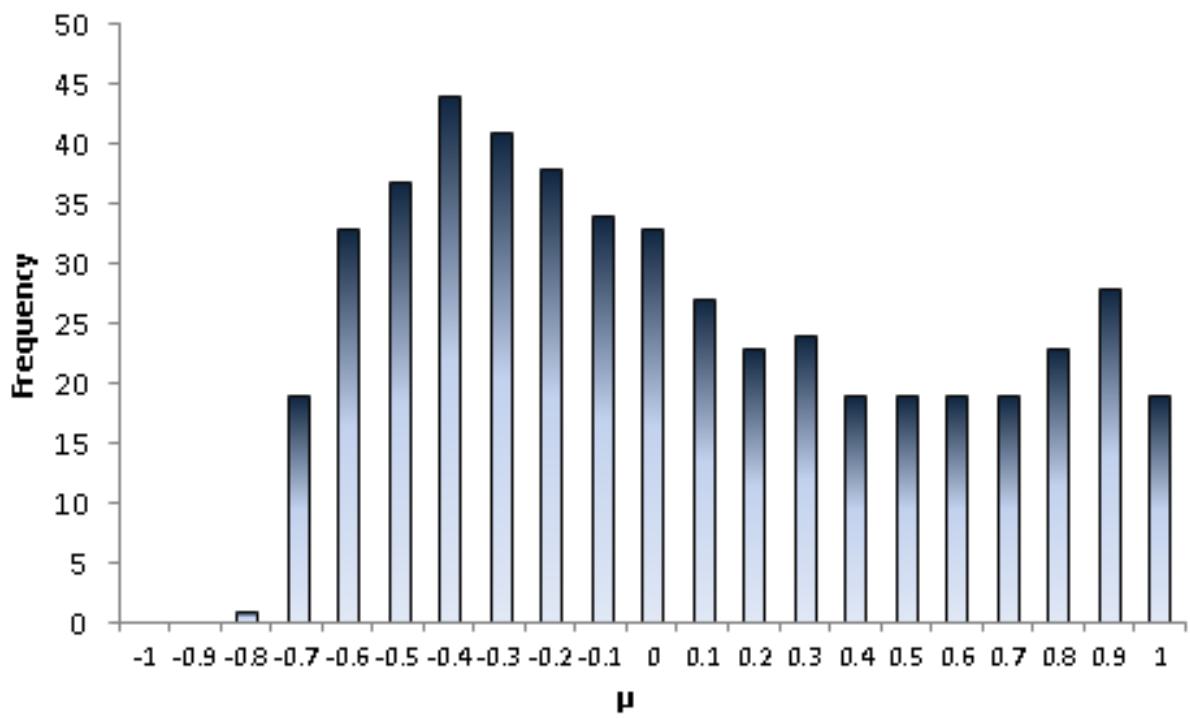


Fig. 6.19: スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) の推移確率行列の固有値分布

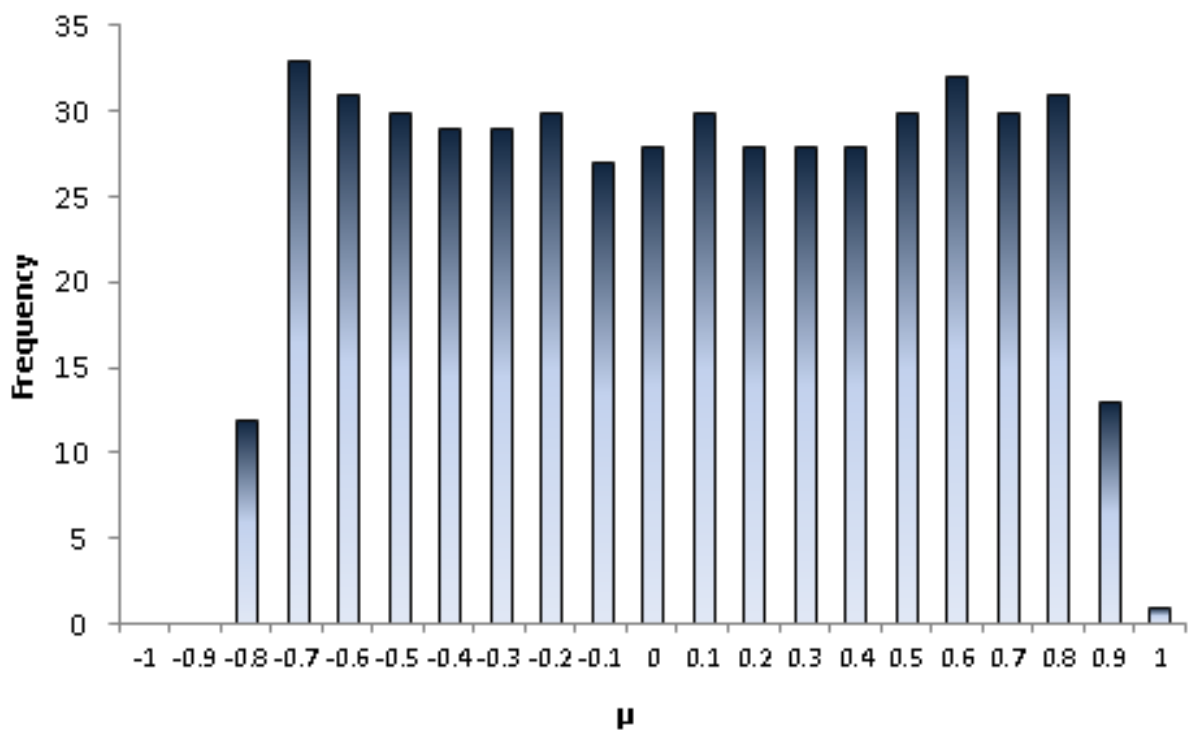


Fig. 6.20: ランダムネットワークの推移確率行列の固有値分布

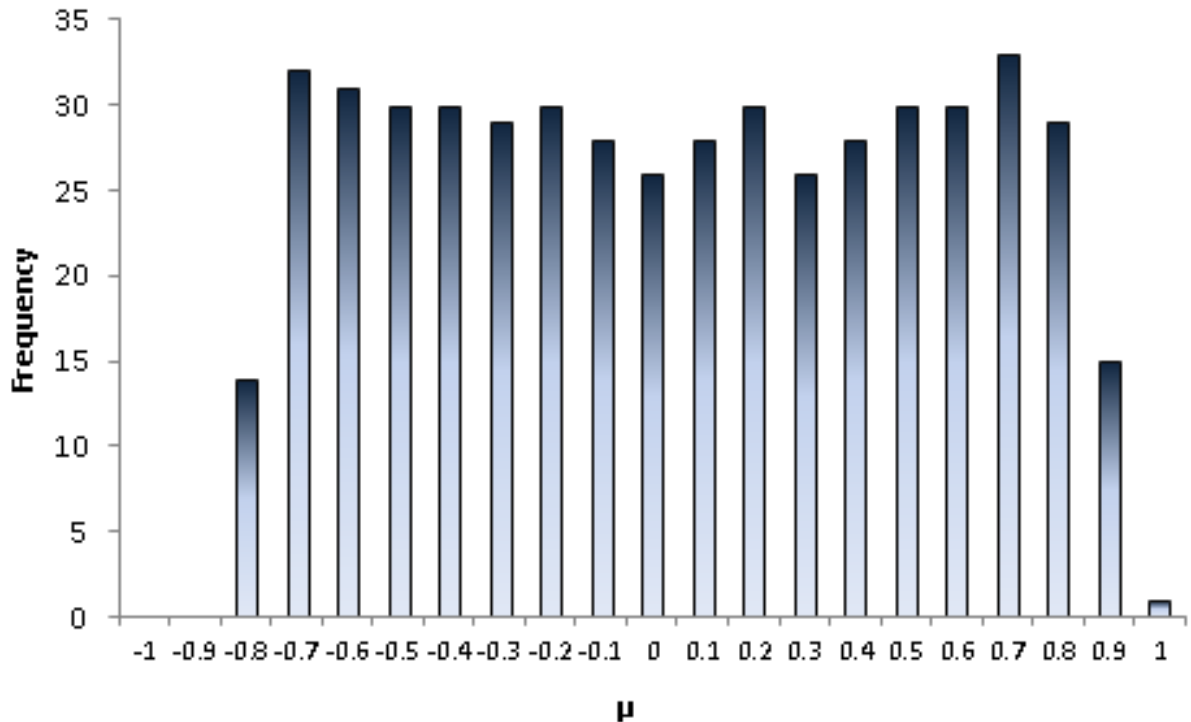


Fig. 6.21: ランダムレギュラーネットワークの推移確率行列の固有値分布

を示し、固有値分布もレギュラーネットワークで存在した谷間のように低い頻度の固有値が増え、バラツキが少なくなる傾向がある。ランダムネットワークは正規化されている重み付けとしての特性から、ラプラシアン行列の固有値分布の特性であった低い固有値が高い頻度を示し、固有値が高くなるにつれて数が少なくなる固有値分布特性はなくなっている。ランダムネットワークの固有値分布は全体的に均質な近い頻度の特性となっている。このことは正規化の重み付けから、ランダムレギュラーネットワークの特性に近づいている傾向が存在する。ランダムレギュラーネットワークは固有値分布も数の差が少なく、均質な特性が現れている。そのため固有値推移が直線的となり、従来モデルでは最も推移確率行列の第2最大固有値が低い値となる特性が現れている。

スケールフリーネットワークは、Fig. 6.17において解析したように、レギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って、中間の固有値が一定値の特性があり、推移確率行列においては、その値が0となっている。そして推移確率行列の特性として中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性をもっている。推移確率行列においては、正規化されている特性から  $1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$  としての固有値の範囲となっている。そのため、固有値分布においても中間の一定な固有値が最も頻度が高く、切り立った山状の特性となっている。少数のリンク数しかない多数のノードと、多数のリンクをもつハブとしての性質のあるノードが一部存在するスケールフリーネットワークとしての次数分布がべき乗則となる特性が現れている。

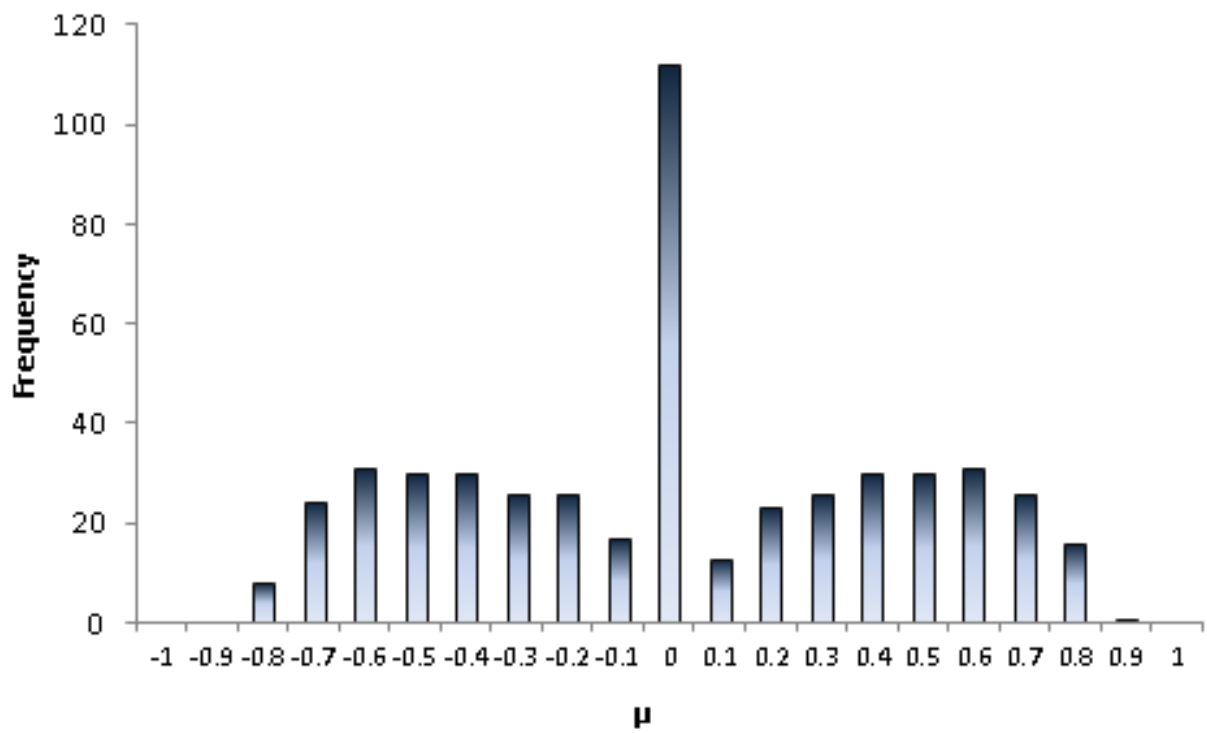


Fig. 6.22: スケールフリーネットワークの推移確率行列の固有値分布

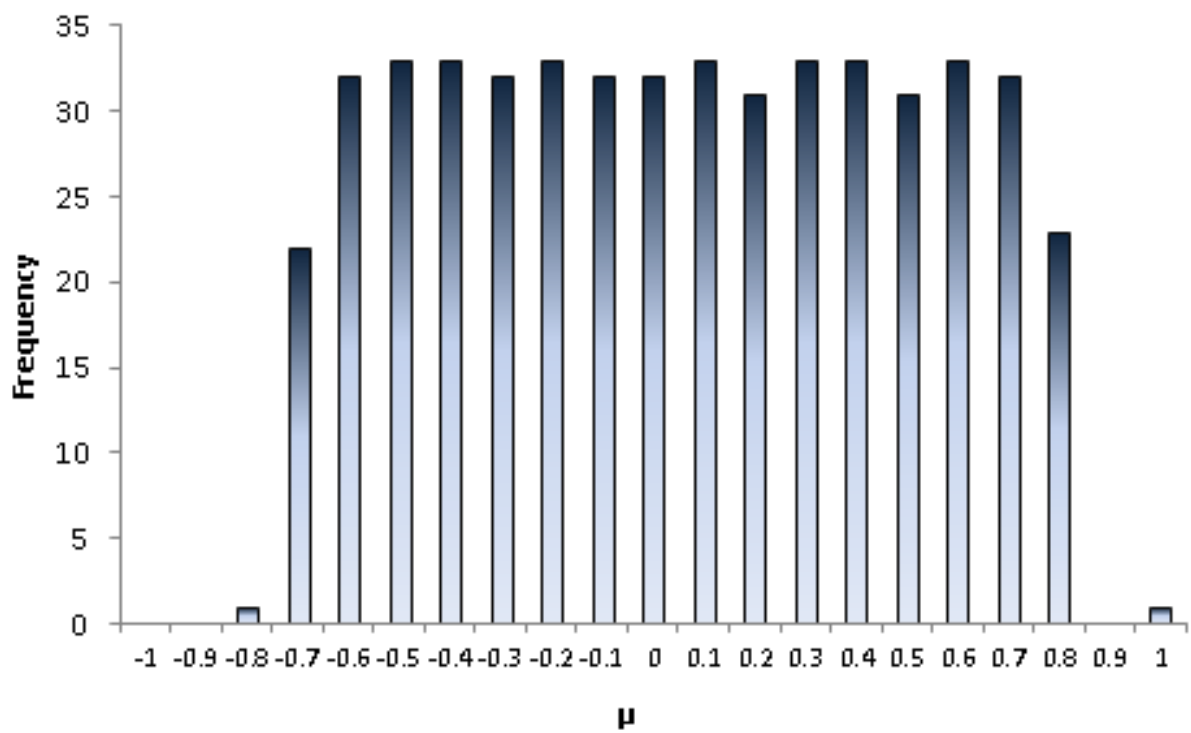


Fig. 6.23: 最適ネットワークの推移確率行列の固有値分布

最適ネットワークは、ラプラシアン行列の場合とは異なり推移確率行列の固有値では、ランダムネットワークやランダムレギュラーネットワークに近い固有値分布形状をもっている。正規化されている重み付け特性から、固有値範囲が  $1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \cdots > \mu_n$  となり、ラプラシアン行列の固有値分布とは異なった均質性の高い特性が現れている。そして第2最大固有値が従来モデルで最も低いランダムレギュラーネットワークよりもさらに低い値となっており、最適ネットワークがより収束性に優れたモデルであることから、推移確率行列における最適な推移確率行列の固有値分布の形状は、全体的に均質で同頻度のものであることがいえる。

#### 6.5.4 正規化ラプラシアン行列によるネットワーク特性

次に、正規化ラプラシアン行列の固有値により最適ネットワークの生成設計を行い、最適ネットワークが従来ネットワークモデルよりも優れたものを生成するかどうかを解析する。

正規化ラプラシアン行列の解析において、従来モデルは5.2章にて説明したネットワークモデルである (Fig. 5.1)。これらの従来モデルである比較ネットワークとネットワークの正規化ラプラシアン行列の全固有値推移を Fig. 6.24 に示す。Fig. 6.24 から、それぞれのネットワークにおける正規化ラプラシアン行列の固有値推移特性が現れており、ラプラシアン行列、推移確率行列の固有値特性とは異なる値となっている。固有値としての推移は、正規化された特性からラプラシアン行列の固有値よりは小さい値となっており、最大値も2以下までとなっている。推移確率行列や正規化ラプラシアン行列において、正規化された重み付き (weighted) としてのネットワーク固有値特性が現れていることが分かる。

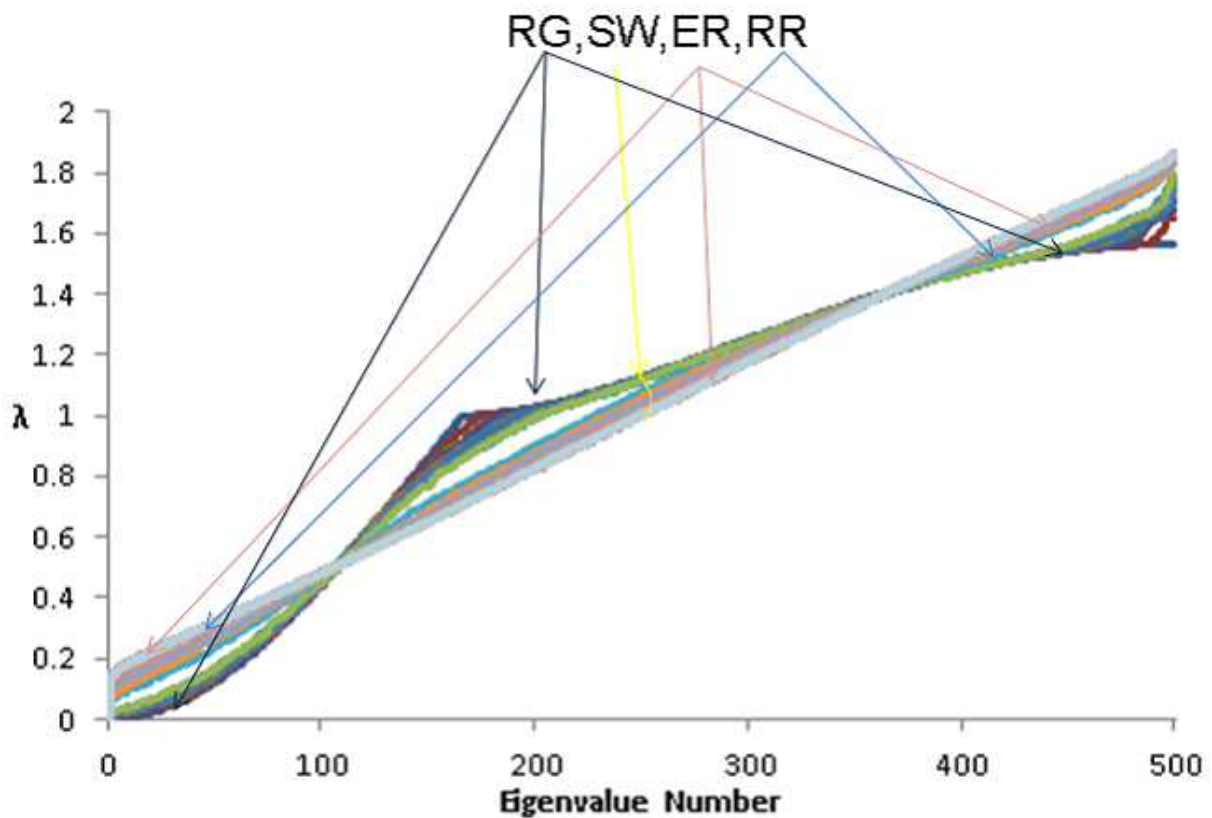


Fig. 6.24: 従来ネットワークモデルの正規化ラプラシアン行列の固有値推移



### 6.5.5 正規化ラプラシアン行列による最適ネットワークの生成設計

ここでは、5章の節でラプラシアン行列による適応関数を定義したように、正規化ラプラシアン行列の適応関数を定義する。そして適応関数に基づき、進化手法により最適ネットワークの生成設計を行う。進化的アルゴリズムで最適化する重み付き評価関数の設定としては、正規化ラプラシアン行列においても、ラプラシアン行列の固有値特性で定義されたように第2最小固有値 $\lambda_2$ , 最大固有値 $\lambda_n$ がそれぞれ収束性の速さと情報の遅延に対するロバスト性に関する特性がある。従って、それらを考慮した正規化ラプラシアン行列の固有値特性による最適化する適応関数は、 $\lambda_2, \lambda_n$ の固有値比率 $Q(\text{condition number})$ を考え、次式で与えられる。

$$E(\omega) = \omega Q + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.6)$$

この適応関数によって、ネットワークを進化生成し、最適なネットワークを設計する。式(6.6)により進化生成した最適ネットワークの次数分布を Fig. 6.25 に示す。

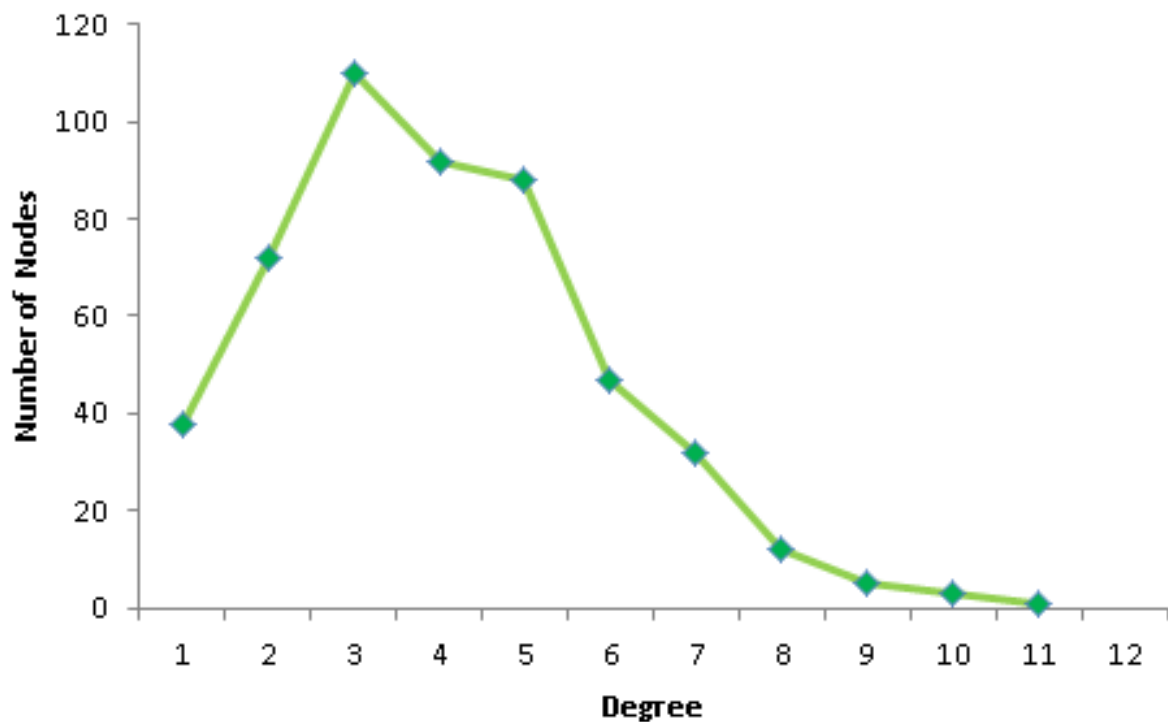


Fig. 6.25: 最適ネットワークの次数分布

そして式 (6.6) により進化生成した最適ネットワークを正規化ラプラシアン行列の固有値特性により従来ネットワークモデルと比較して解析していく。Fig. 6.26 に進化生成した最適ネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値推移について従来ネットワークモデル (スモールワールドは代表例として  $p = 0.2$ ) と比較したものを示す。これより、ラプラシアン行列の固有値特性でもみられたレギュラーネットワークの不規則な推移、ランダムネットワークの曲線的な推移、スモールワールドネットワークにおけるレギュラーネットワークとランダムネットワークの  $p$  による中間的な性質をもつ推移、ランダムレギュラーネットワークの均質性からなる直線的な推移があることが分かる。そしてその推移していく値は推移確率行列の固有値特性とは逆の大きさで推移していく特性があり、ラプラシアン行列としての固有値特性も存在し、それが正規化されたものとしての値を示していることが分かる。

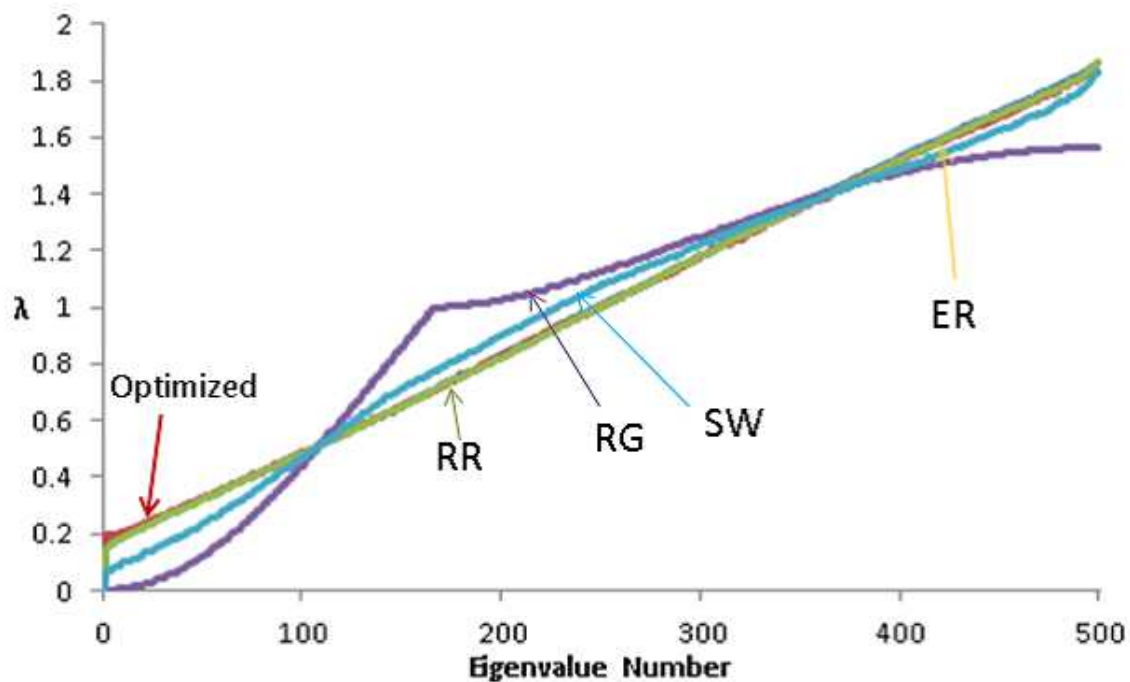


Fig. 6.26: 従来ネットワークモデルと最適ネットワークによる正規化ラプラシアン行列の固有値推移

最適ネットワークは、正規化ラプラシアン行列としての固有値特性において第2最小固有値  $\lambda_2$  が高くなり、最大固有値  $\lambda_n$  は比較的lowめの値となるように進化していることが分かる。このことから  $\lambda_2, \lambda_n$  の固有値比率  $Q$  が低くなるように進化しており、収束性に関して優れたものが生成されていることがみられる。このことをより捉えるために次の図を示す。正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2$  について、Fig. 6.27 にそれを最適ネットワーク (Opt) と従来ネットワークモデルと比較したものを示す。そして  $Q$  (condition number) を比較したものを Fig. 6.28 に示す。

Fig. 6.27 より、正規化ラプラシアン行列の固有値特性においても、従来モデルで最も第2最小固有値  $\lambda_2$  が最も高いのはランダムレギュラーネットワークであり、収束性の速い従来

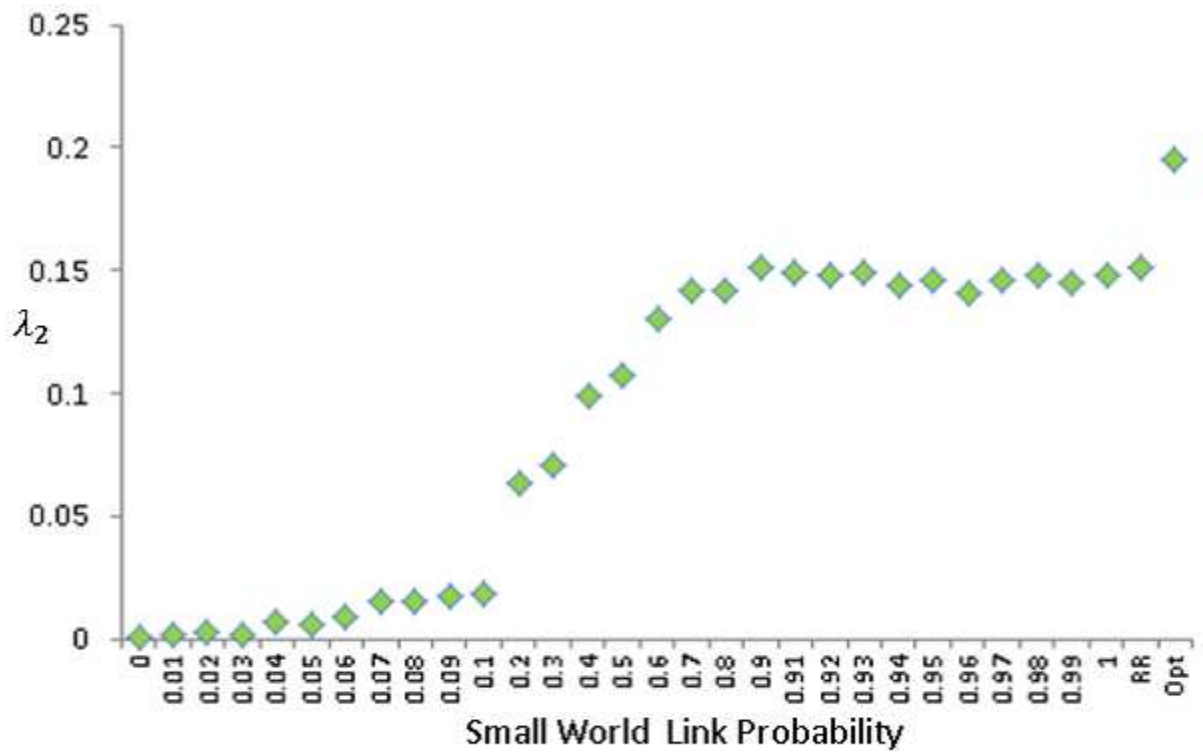


Fig. 6.27: 正規化ラプラシアン行列による従来モデルと最適ネットワークの第2 最小固有値の比較

ネットワークモデルであることがいえる．そしてランダムレギュラーネットワークは正規化ラプラシアン行列における  $Q(\text{condition number})$  においても従来モデルで最も低い値をもっており，収束性に優れたモデルであることが分かる．これはラプラシアン行列，推移確率行列の固有値特性で解析したものと対応する特性である．そして最適ネットワークが従来ネットワークモデルと比較して，第2 最小固有値が高く，さらに優れた特性をもっていることが分かる．

そして  $Q(\text{condition number})$  においても, Fig. 6.28 から最適ネットワークが従来ネットワークモデルよりも低い値をもち, コンセンサス, 同期問題における収束性に対してより優れた特性が本研究の進化生成したネットワークに存在していることが分かる. よって正規化ラプラシアン行列の固有値特性による最適ネットワークにおいても, 従来モデルで最も優れたランダムレギュラーネットワークよりも優れた収束性をもつネットワークが生成されることが分かる.

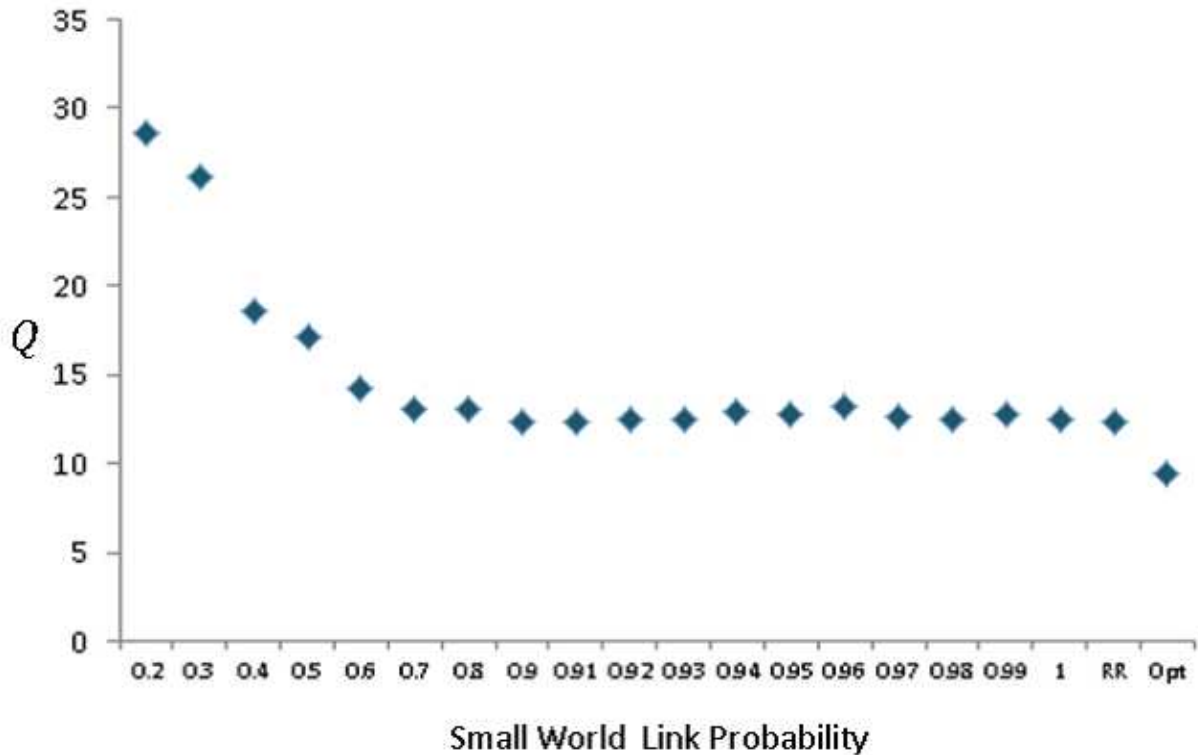


Fig. 6.28: 正規化ラプラシアン行列による従来モデルと最適ネットワークの  $Q(\text{condition number})$  の比較

正規化ラプラシアン行列の固有値特性の参考として, ラプラシアン行列, 推移確率行列でも解析した代表的ネットワークモデルの一つであるスケールフリーネットワーク (SF:Scale-Free Network) による正規化ラプラシアン行列の全固有値推移を Fig. 6.29 に示す.

Fig. 6.29 から正規化ラプラシアン行列におけるスケールフリーネットワークの固有値推移特性が分かる. それは Fig. 6.8, Fig. 6.17 においてラプラシアン行列, 推移確率行列の視点からスケールフリーネットワークを解析した場合とは異なった特性も現れている. ラプラシアン行列の固有値特性においては, スケールフリーネットワークは, 次数分布がべき乗則としての性質のあることから, 最大固有値が大きくなる特性があった. しかし, 正規化ラプラシアン行列においては, 正規化されている特性から最大値も 2 以下の範囲となる. 推移確率行列では,  $1 = \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$  としての固有値の範囲となっている. そしてラプラシ

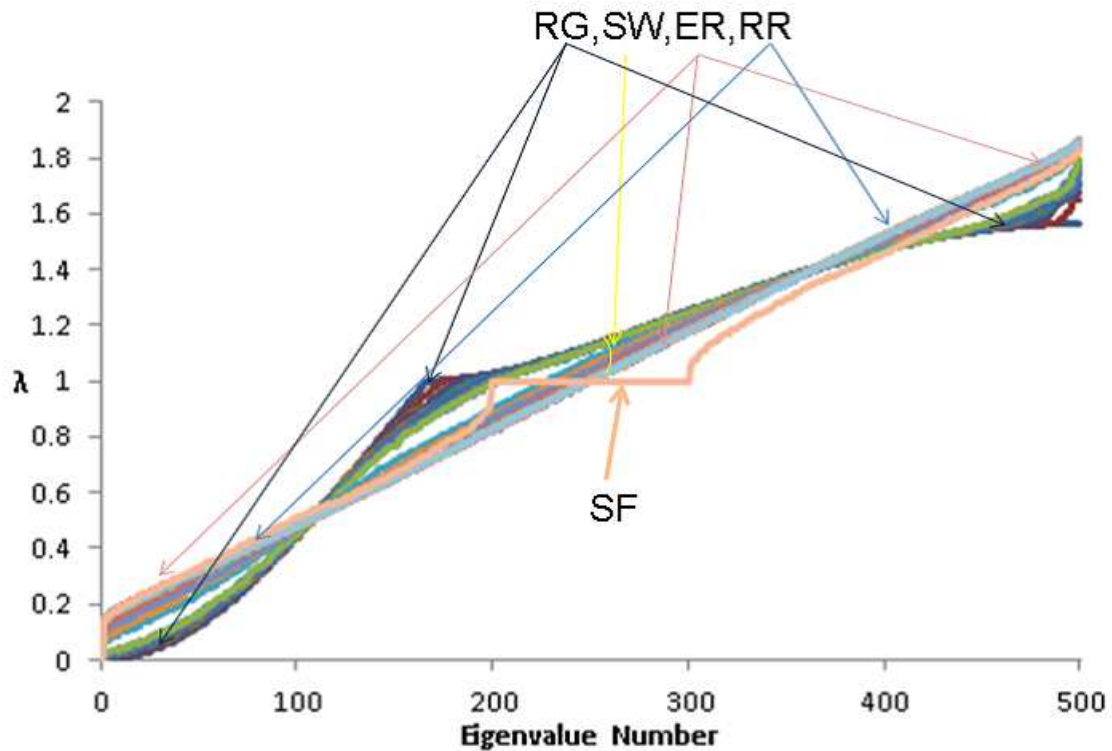


Fig. 6.29: 従来ネットワークモデルとスケールフリーネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値推移

アン行列，推移確率行列の特性でも存在した中間の固有値が一定値のスケールフリーネットワークとしての特性があり，正規化ラプラシアン行列においては，その値が1となっている．Fig. 6.7 でみたラプラシアン行列では2であり，Fig. 6.17 における推移確率行列では0である．そして正規化ラプラシアン行列の特性として，推移確率行列でもみられた中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性も包含している．このようなことから，スケールフリーネットワーク特性としてラプラシアン行列の固有値推移と共通な特性ももちつつ，正規化されたラプラシアン行列の重み付き (weighted) としてのネットワーク特性も包含していることが分かる．

### 6.5.6 正規化ラプラシアン行列の固有値分布によるスペクトル解析

ここでは，正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいたスペクトル解析からネットワークの特性をみていく．各種ネットワークの固有値分布を以下に示していく．

まずは従来ネットワークモデルであるレギュラーネットワーク，スモールワールドネットワーク (代表として  $p = 0.2$ ) ランダムネットワーク，ランダムレギュラーネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布をそれぞれ Fig. 6.30, Fig. 6.31, Fig. 6.32, Fig. 6.33 に示す．

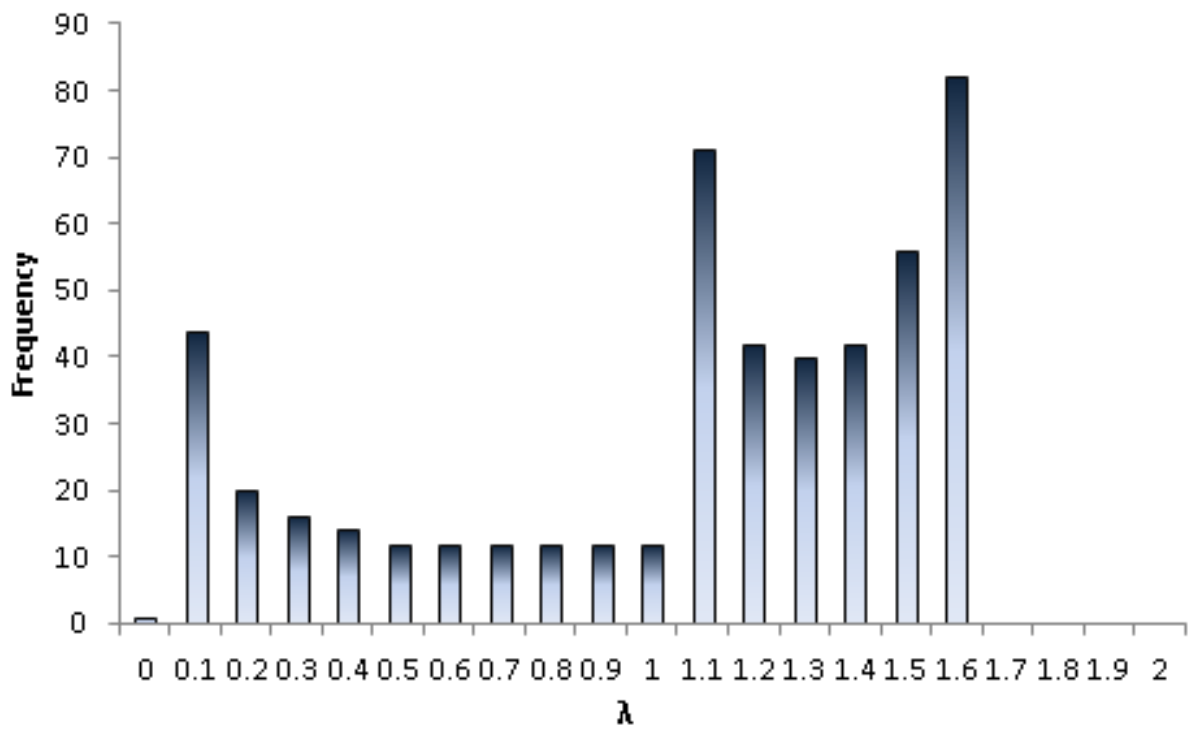


Fig. 6.30: レギュラーネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布

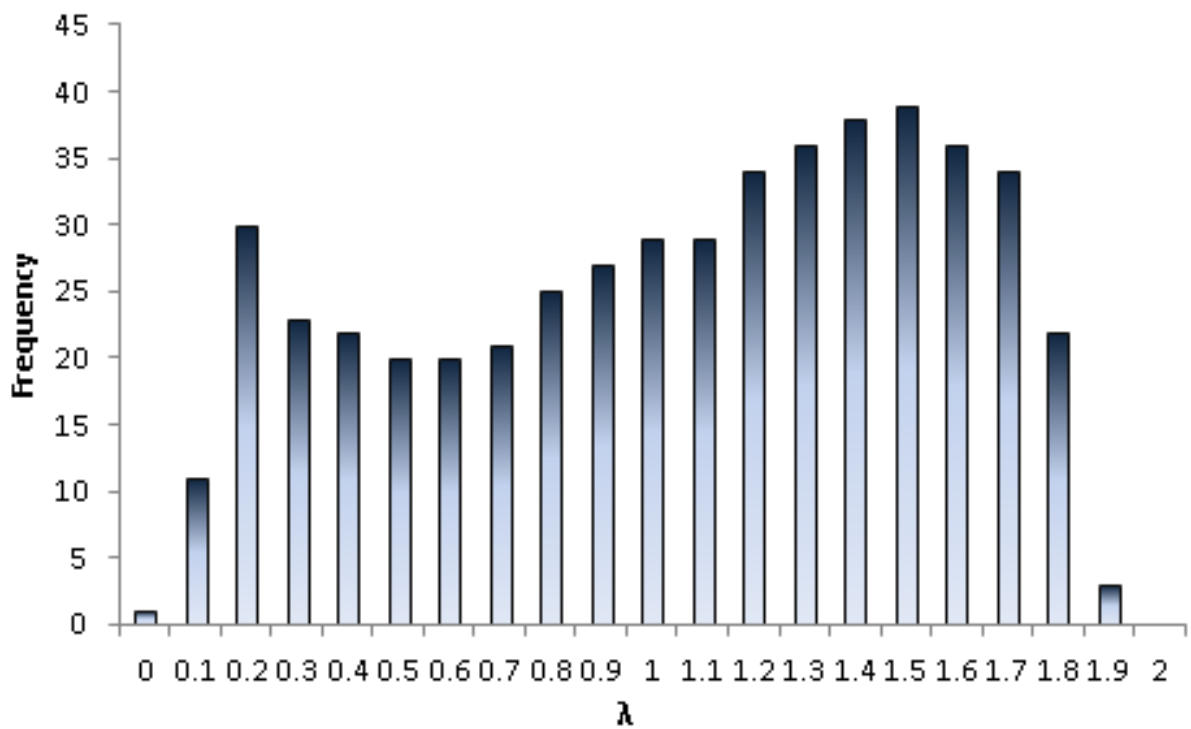


Fig. 6.31: スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) の正規化ラプラシアン行列の固有値分布

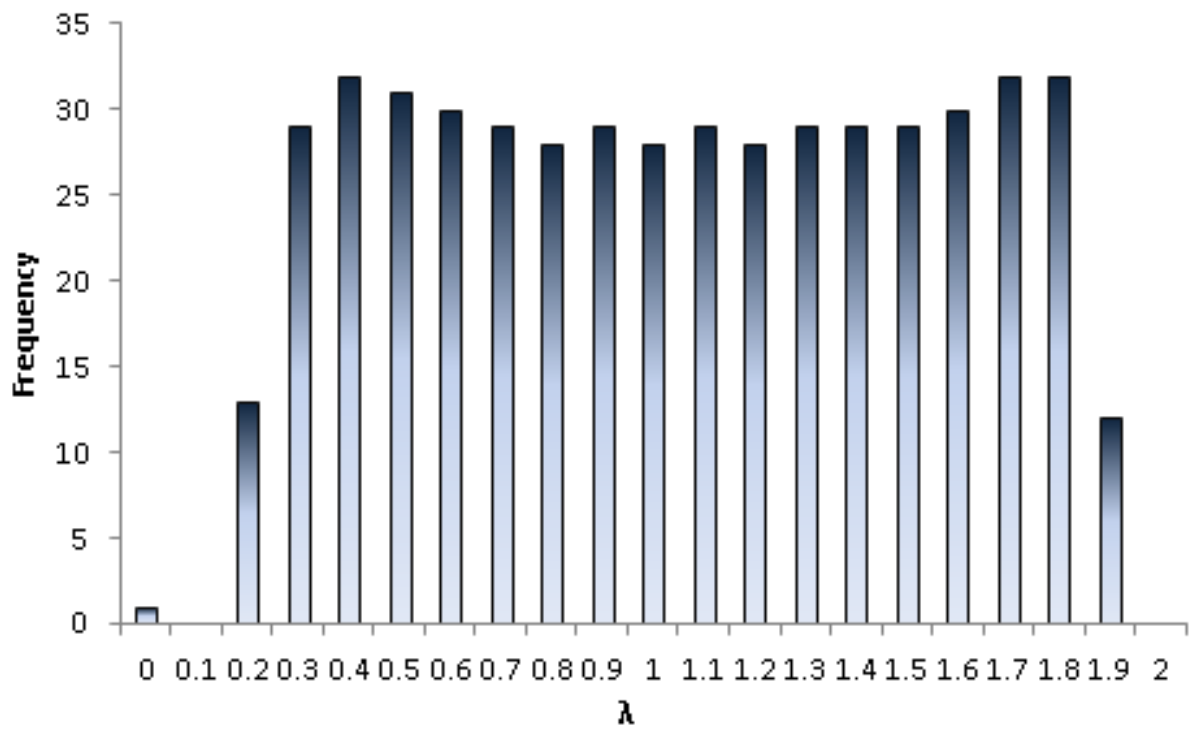


Fig. 6.32: ランダムネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布

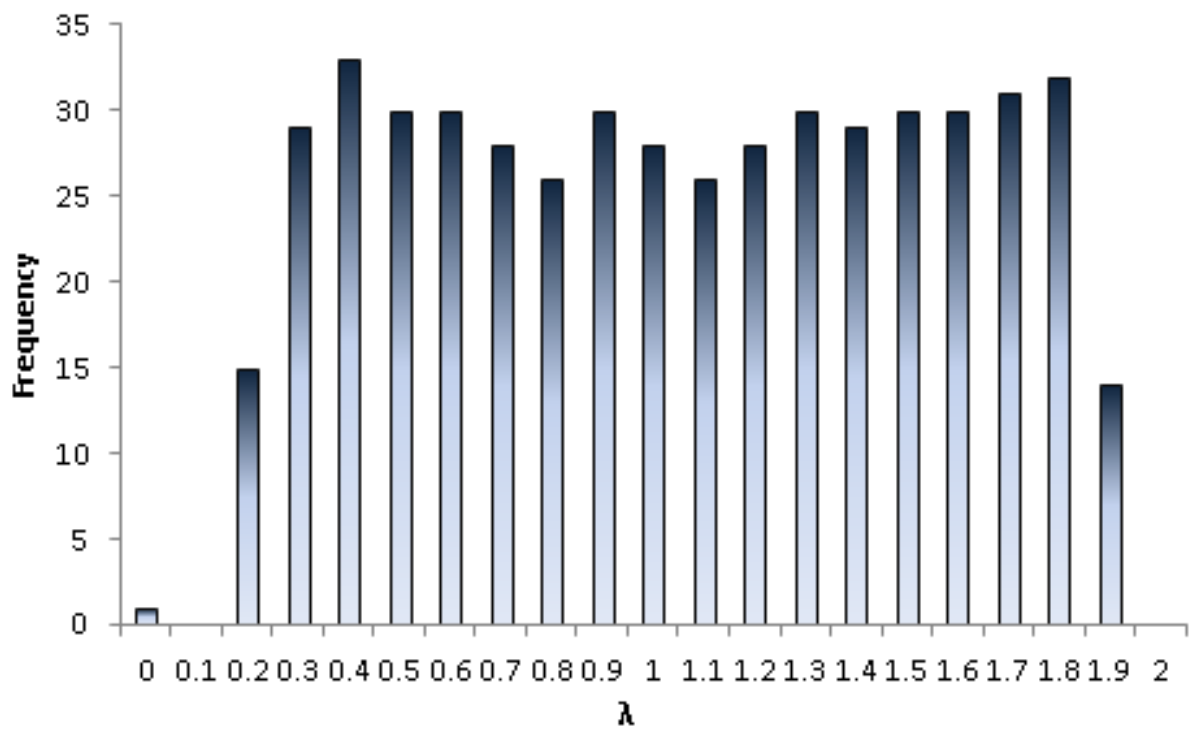


Fig. 6.33: ランダムレギュラーネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布

固有値分布からネットワークの固有値推移の意味がみてとれる。レギュラーネットワークは代数的連結性が低いため、全体的な固有値が低く、推移も急な高まりと変動があり、固有値分布が谷間のように低い頻度とバラツキのある特性となっている。スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) はランダムネットワークとレギュラーネットワークの中間的な固有値推移を示し、固有値分布もレギュラーネットワークで存在した谷間のように低い頻度の固有値が増え、バラツキが少なくなる傾向がある。ランダムネットワークは推移確率行列と同じく正規化されている重み付けとしての特性から、ラプラシアン行列の固有値分布の特性であった低い固有値が高い頻度を示し、固有値が高くなるにつれて数が少なくなる固有値分布特性はなくなっている。ランダムネットワークの固有値分布は全体的に均質な近い頻度の特性となっている。このことは正規化の重み付けから、ランダムレギュラーネットワークの特性に近づいている傾向が存在する。ランダムレギュラーネットワークは固有値分布も数の差が少なく、均質な特性が現れている。そのため固有値推移が直線的となり、従来モデルでは最も正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値が高い値となる特性が現れている。スケールフリーネットワークは、Fig. 6.17において解析したように、レギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って、中間の固有値が一定値の特性があり、正規化ラプラシアン行列においては、その値が1となっている。そして正規化ラプラシアン行列の特性として中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性をもっている。正規化ラプラシアン行列においては、正規化されている特性から2以下の固有値の範囲となっている。そのため、固有値分布においても中間の一定な固有値が最も頻度が高く、切り立った山状の特性となっている。スケールフリーネットワークとしての次数分布がべき乗則となる特性が現れている。

最適ネットワークは、ラプラシアン行列の場合とは異なり正規化ラプラシアン行列の固有値では、ランダムネットワークやランダムレギュラーネットワークに近い固有値分布形状をもっている。正規化されている重み付け特性から、固有値範囲が2以下となり、ラプラシアン行列の固有値分布とは異なった均質性の高い特性が現れている。そして第2最小固有値が従来モデルで最も高いランダムレギュラーネットワークよりもさらに高い値となっており、最適ネットワークがより収束性に優れたモデルであることから、正規化ラプラシアン行列における最適な固有値分布の形状は、全体的に均質で同頻度のものであることがいえる。ラプラシアン行列の固有値特性と共通な特性ももちつつ、正規化された重み付きとしてのネットワーク特性も包含していることが分かる。



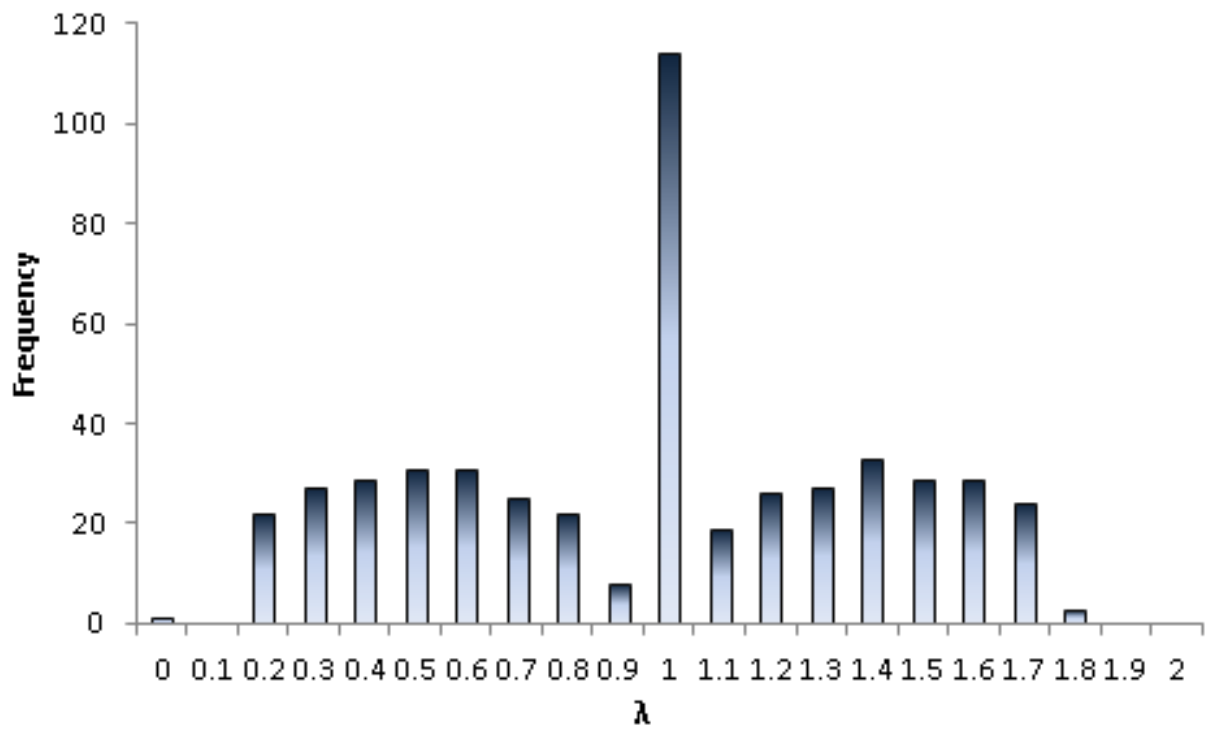


Fig. 6.34: スケールフリーネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布

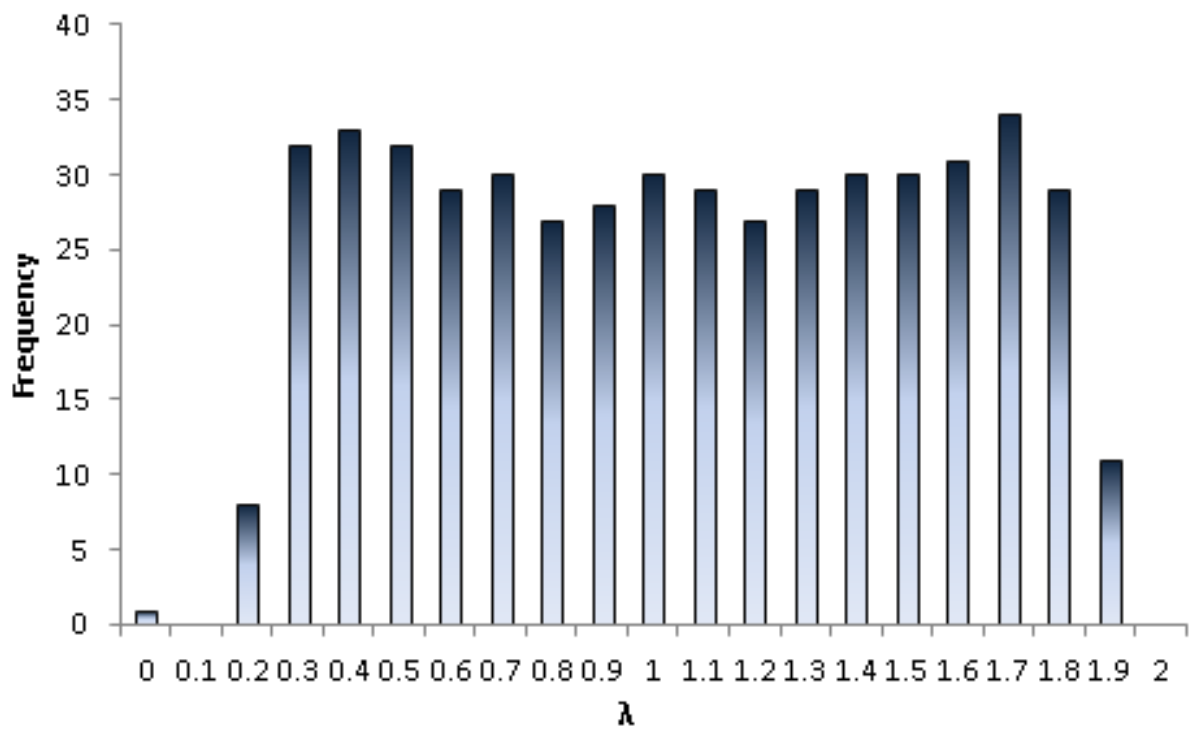


Fig. 6.35: 最適ネットワークの正規化ラプラシアン行列の固有値分布

## 6.6 合意形成に適さないネットワークの生成設計

これまで、コンセンサス、同期問題に対して優れた合意形成を行いやすい最適ネットワークの生成設計を行ってきた。ここでは、コンセンサス、同期問題に対して収束性に優れない、合意形成に適さない進化最適化されたネットワークの生成設計を行う。合意形成を行いやすい最適ネットワークの生成設計とは逆の目的特性となる合意形成の行いにくい最適ネットワークを考える。

### 6.6.1 合意形成に適さないネットワークの適応関数

これまで解析してきたコンセンサス、同期問題に対して優れた合意形成を行いやすい最適ネットワークの生成設計においては、その適応関数の設定は、5.1.2 節の式 (5.5) でみてきたようにラプラシアン行列  $L$  の第2最小固有値、最大固有値である  $\lambda_2, \lambda_n$  を考え、コンセンサスの収束性に関する代数的連結性を高めて、情報の遅延に対するロバスト性をもつように最適化する適応関数であった。ここでは、代数的連結性を低め、情報遅延に対してロバスト性のないものを生成設計するため以下のように適応関数を設定する。

$$E(\omega) = \omega \frac{\lambda_2}{\lambda_n} + (1 - \omega) \langle k \rangle \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.7)$$

これにより、ラプラシアン行列  $L$  の第2最小固有値  $\lambda_2$  を低め、最大固有値である  $\lambda_n$  を高める特性をもつ適応関数が設定できる。そのため、この適応関数によって最適化されたネットワークは、代数的連結性が低く、情報遅延に対してもロバスト性のない収束の遅いネットワークが生成される。

### 6.6.2 木構造の最適ネットワーク

以下に Fig. 6.20 によって生成されたコンセンサス、同期問題における合意形成に適さないものとして進化最適化された最適ネットワークの構造を示す。適応関数を線形結合するパラメータである  $\omega (0 \leq \omega \leq 1)$  による重み付けの全ての場合において、Fig. 6.36 に示すように木構造をもつネットワークが進化生成された。

これによって、コンセンサス、同期問題において、それに適さないように進化最適化されたネットワークは木構造ネットワークであることが分かる。Fig. 6.36 は 500node の規模であったが、Fig. 6.37 には 100node の場合を示す。どちらも木構造ネットワークが生成されている。

そして、コンセンサス、同期問題における収束の速さにおいて、500node の場合は 100node の場合よりもさらに多大な時間を要しており、これはレギュラーネットワークの収束性でもみたようにネットワークの規模が大きくなると、その代数的連結性がより低くなり、収束に

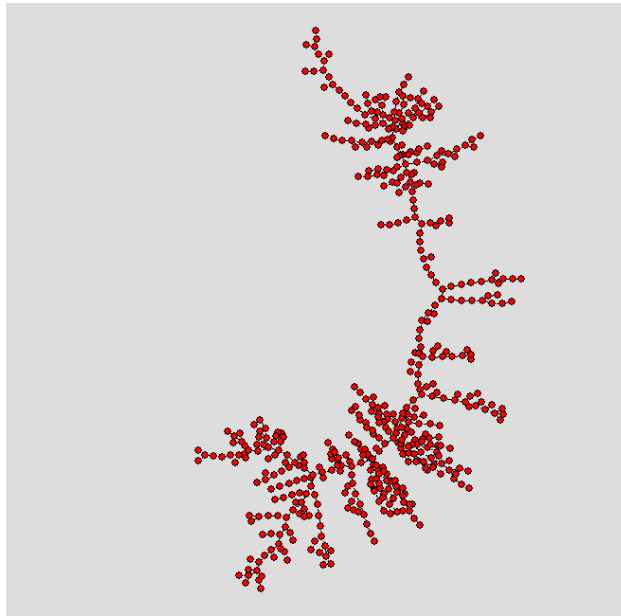


Fig. 6.36: 合意形成に適さないものとして進化最適化された木構造の最適ネットワーク (500node)

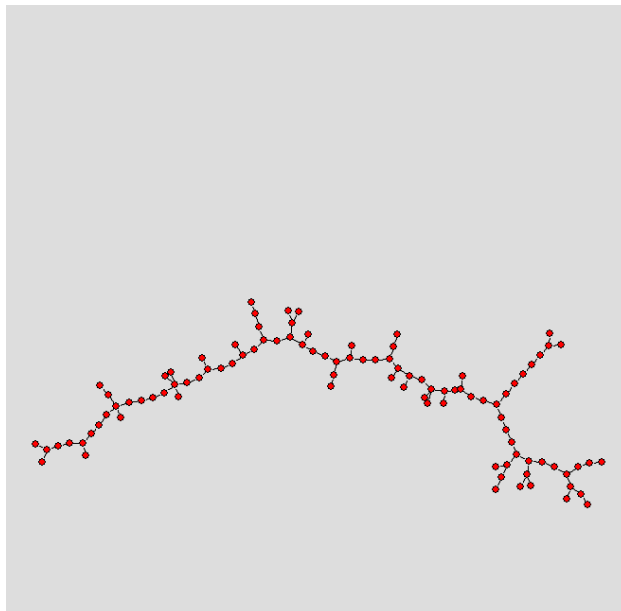


Fig. 6.37: 合意形成に適さないものとして進化最適化された木構造の最適ネットワーク (100node)

果てしないほどの多大な時間を必要とするようになる．そしてレギュラーネットワークよりもさらに遅い収束性を示している．ネットワークシステムの設計や制御において，このような合意形成に時間を要するネットワークは，コンセンサス，同期における合意形成のために負のエネルギーが集約発揮されるようなシステム設計に適用される効果も考えられる．

Table 6.4 に合意形成に適さない木構造の最適ネットワークの固有値特性とコンセンサスの収束性についてまとめたものを示す．

Table 6.4: 合意形成に適さない木構造の最適ネットワークの固有値特性と収束性

特性 構造	直径	第2 最小固有値	最大固有値	condition number	収束時間
tree(100node)	51	0.0019	6.10	3100.35	469472
tree(500node)	70	0.00029	7.86	27110.10	4427137

そして，このようなコンセンサス，同期問題における合意形成に適さない木構造の最適ネットワークは，以下に示す適応関数によっても進化生成された．これらの適応関数によって生成された最適ネットワークは，代数的連結性が非常に低い特性を包含するものであり，このことから木構造ネットワークが合意形成に適さない最適ネットワーク構造であることが分かる．

$$E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\langle k \rangle \quad (0 \leq \omega < 1) \quad (6.8)$$

$$E(\omega) = \omega\lambda_n + (1 - \omega)\langle k \rangle \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.9)$$

$$E(\omega) = \omega\frac{1}{\lambda_n} + (1 - \omega)\langle k \rangle \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.10)$$

ラプラシアン行列の固有値によるスペクトル解析からも木構造ネットワークの特性を捉えることができる．Fig. 5.2 で示したスモールワールドネットワークやランダムレギュラーネットワークと固有値推移を比較したものを Fig. 6.38 に示す．

Fig. 6.38 より，木構造の最適ネットワークの固有値推移は全体的な固有値が非常に低い値をもって推移していく．第2 最小固有値は非常に小さく，代数的連結性の低さから収束が非常に遅い構造が現れている．そして非常に低いリンク数にも関わらず，最大固有値は比較的大きくなっているため，情報遅延に対するロバスト性もない構造となっている．

そして Fig. 6.39 には，木構造の最適ネットワークの固有値分布を示す．

Fig. 6.39 より木構造ネットワークの代数的連結性が低いため，全体的な固有値が低い特性がある．そして大多数の固有値が極小の値で固まる特性があり，ラプラシアン行列の固有値特性としての代数的連結性が非常に低く，収束が非常に遅いトポロジーとしての特性が現れ

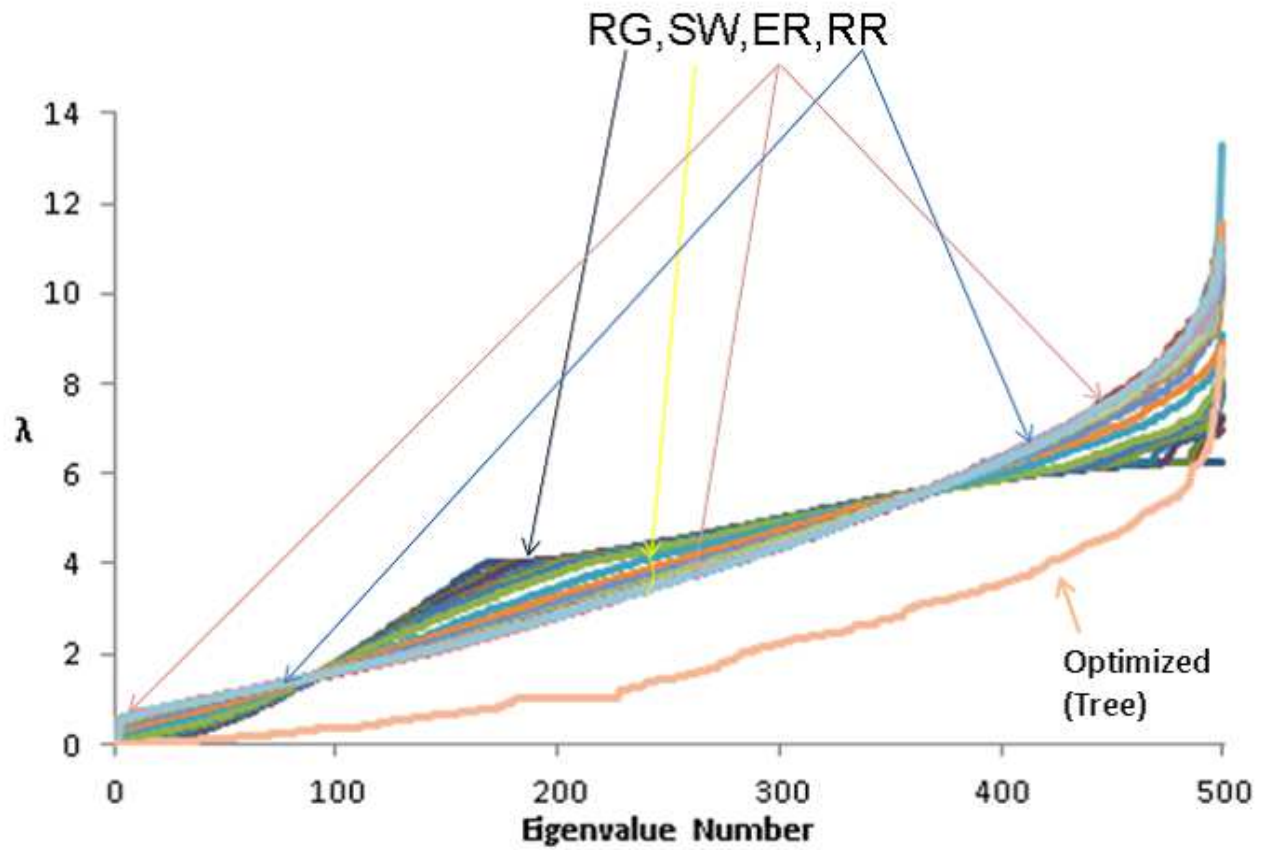


Fig. 6.38: 木構造の最適ネットワークと従来モデルのラプラシアン行列の固有値推移

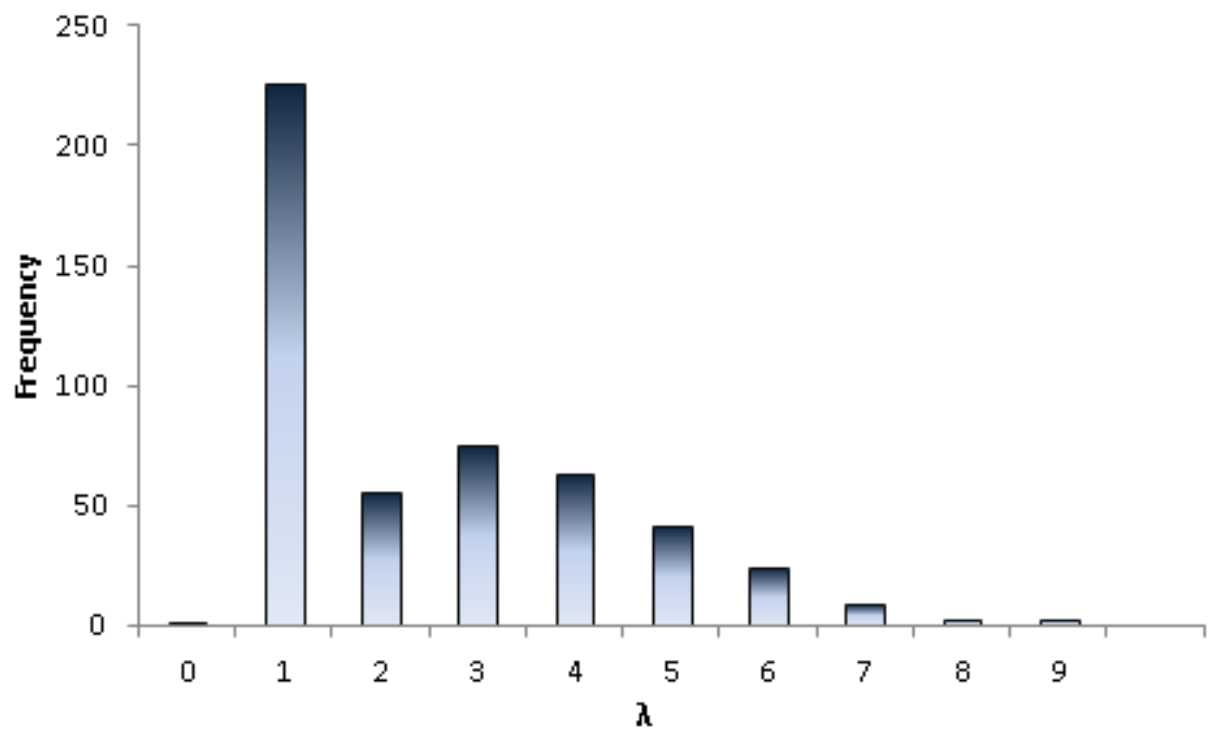


Fig. 6.39: 木構造の最適ネットワークの固有値分布

ている．このようなことからスペクトル解析から，木構造の最適ネットワーク特性を読み取ることができ，コンセンサス，同期問題における合意形成を行いにくいネットワーク構造として進化最適化されていることが分かる．

### 6.6.3 推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク

ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて，コンセンサス，同期問題における合意形成に適さない最適ネットワークを生成設計し，そのトポロジーは木構造であることが分かった．そして合意形成に適さない最適ネットワークの進化生成において，推移確率行列と正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて行っても，木構造ネットワークが進化生成された．以下にその適応関数を示す．

#### 推移確率行列の適応関数

推移確率行列の固有値特性に基づく適応関数について，以下に木構造ネットワークが進化生成されたコンセンサス，同期問題における合意形成に適さない最適ネットワークを生成設計するための適応関数を示す．

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\mu_2} + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega < 1) \quad (6.11)$$

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\mu_1} + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.12)$$

$$E(\omega) = \omega \mu_1 + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.13)$$

ここで  $\mu_1$  は推移確率行列における最大固有値， $\mu_2$  は第2最大固有値である．

#### 正規化ラプラシアン行列の適応関数

正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づく適応関数について，以下に木構造ネットワークが進化生成されたコンセンサス，同期問題における合意形成に適さない最適ネットワークを生成設計するための適応関数を示す．

$$E(\omega) = \omega \frac{\lambda_2}{\lambda_n} + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (6.14)$$

$$E(\omega) = \omega \lambda_2 + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega < 1) \quad (6.15)$$

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\lambda_n} + (1 - \omega)\alpha \quad (0 \leq \omega < 1) \quad (6.16)$$

これらの適応関数により，木構造の最適ネットワークが進化生成される．推移確率行列と正規化ラプラシアン行列における固有値特性においても，進化手法による最適化によって，収束性に適さない最適ネットワークを生成設計することができることが分かる．

## 6.6.4 ロリポップ形状の最適ネットワーク

これまで解析してきたように、コンセンサス，同期問題における合意形成に適さないネットワークとして，木構造ネットワークが進化生成されることが分かった．しかし，合意形成に不適な全通りの適応関数の組み合わせの中で，一部木構造とは異なったネットワークが進化生成された．ここでは，そのネットワークについて述べる．

コンセンサス，同期問題における合意形成に適さない適応関数の中で，次式の関数

$$E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\langle k \rangle \quad (\omega = 1) \quad (6.17)$$

の中で， $\omega = 1$  の場合に Fig. 6.40 に示すようなネットワークが進化生成された．

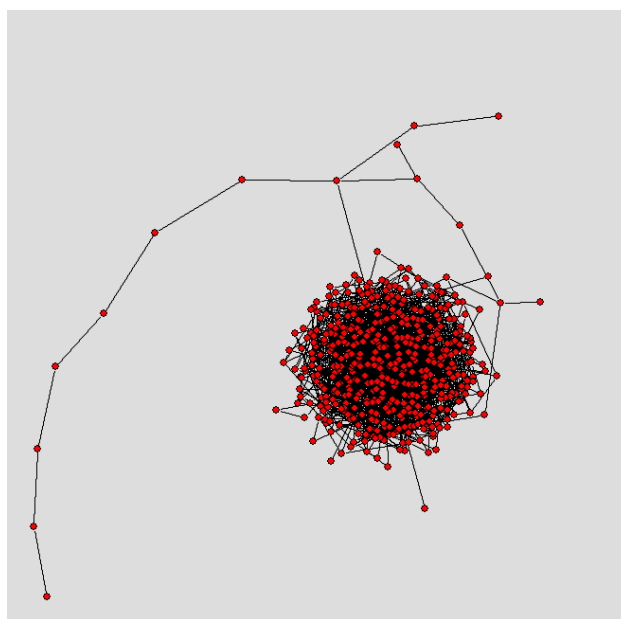


Fig. 6.40: 合意形成に適さないものとして進化最適化されたロリポップ形状の最適ネットワーク (500node)

Table 6.5: 合意形成に適さないロリポップ形状の最適ネットワークの固有値特性と収束性

特性 構造	直径	第2 最小固有値	最大固有値	condition number	収束時間
like lollipop(100node)	29	0.0041	17.09	4119.41	218406
like lollipop(500node)	17	0.016	18.92	1166.28	69021

これによって，コンセンサス，同期問題において，それに適さないように進化最適化されたネットワークの中にはリンク制約が無い場合において，ロリポップ形状のようなトポロジーをもつネットワークも存在することが分かる．これまでみてきたように合意形成に適さない目的特性の大部分の適応関数において，木構造ネットワークが生成されている．しかし，一



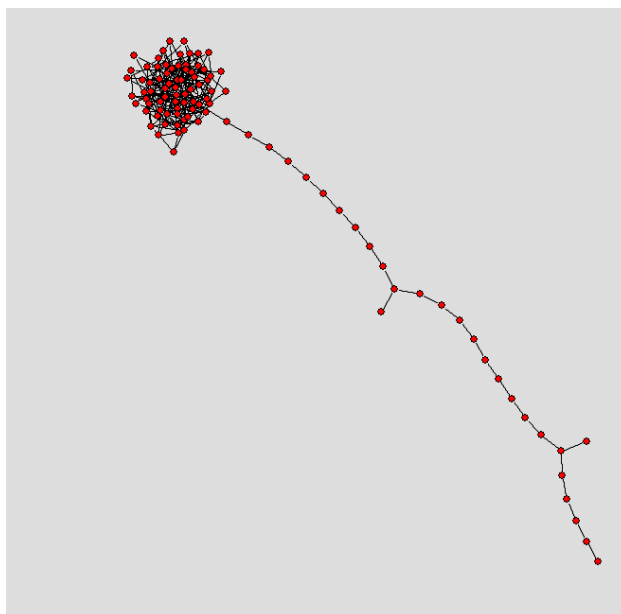


Fig. 6.41: 合意形成に適さないものとして進化最適化されたロリポップ形状の最適ネットワーク (100node)

部ロリポップに似た形状のような最適ネットワークも生成される．そしてこのロリポップ形状のネットワークは **condition number** の値が相当低いことも注視すべき特性である．つまり，コンセンサス，同期問題において，合意形成に適さない進化最適化されたネットワークの中には，ロリポップ形状のネットワークも存在するということである．Fig. 6.40 は 500node の規模であったが，Fig. 6.41 には 100node の場合を示す．どちらもロリポップ形状のネットワークが生成されている．

Table 6.5 に合意形成に適さないロリポップ形状の最適ネットワークの固有値特性とコンセンサスの収束性についてまとめたものを示す．

ロリポップ形状の最適ネットワークにおいて，収束性は木構造ネットワークほどの遅さはないが，代数的連結性や **condition number** の値はかなり低いものとなっている．そのため，多くのネットワークモデルの中では，相対的にかなり収束の遅いネットワーク構造が進化生成されている．

### 6.6.5 推移確率行列と正規化ラプラシアン行列による最適ネットワーク

ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて、合意形成に適さない最適ネットワークの進化生成を行った中には、ロリポップ形状の最適ネットワークが存在することが分かった。推移確率行列と正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて行っても、ロリポップ形状のネットワークが進化生成されたが、ラプラシアン行列の場合とは異なった特性も包含している。以下にその適応関数を示す。

#### 推移確率行列の適応関数

推移確率行列の固有値特性に基づく適応関数について、以下にロリポップ形状のネットワークが進化生成されたコンセンサス、同期問題における合意形成に適さない最適ネットワークを生成設計するための適応関数を示す。

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\mu_2} + (1 - \omega)\alpha \quad (\omega = 1) \quad (6.18)$$

ここで Fig. 6.42 に合意形成に適さないものとして進化最適化された推移確率行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (500node) を示し、Fig. 6.43 にその次数分布を示す。Fig. 6.44 には 100node の場合を示す。

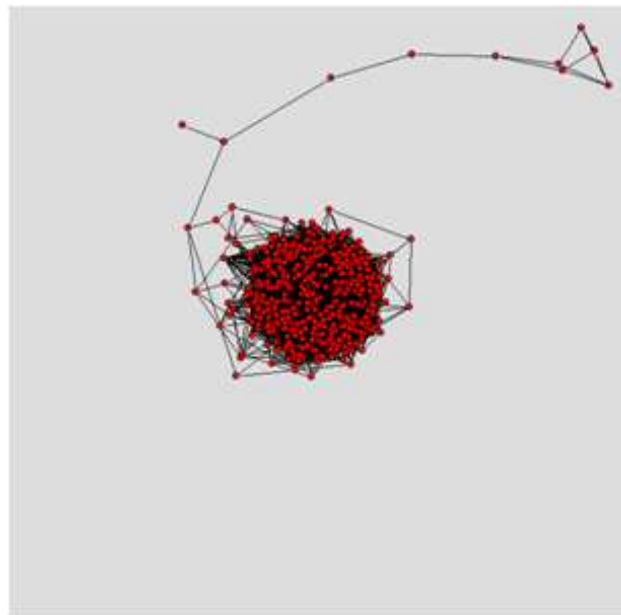


Fig. 6.42: 合意形成に適さないものとして進化最適化された推移確率行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (500node)

ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて最適化した場合と異なる点として、推移確率行列の場合では、まるで尻尾のように小さく固まった連結部分が形成される特徴がある。ラプラシアン行列の場合では、一つの大きな連結部分を除くと、あとは線状の連結部分があるの

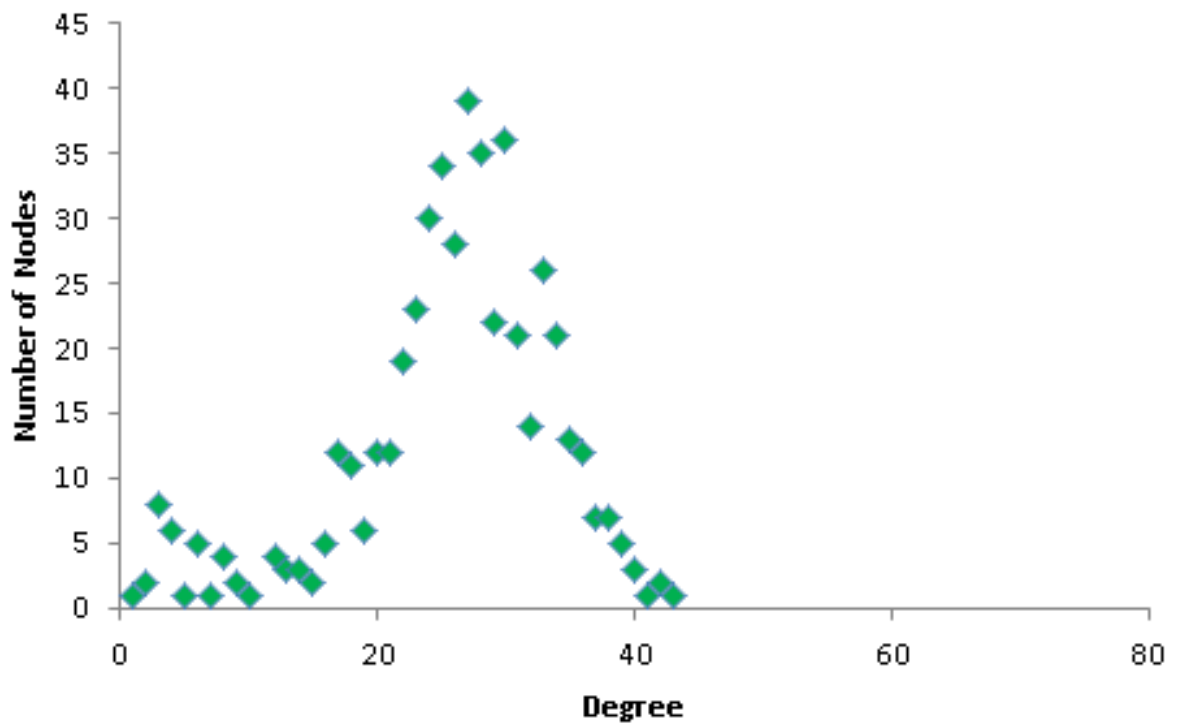


Fig. 6.43: 推移確率行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (500node) の次数分布

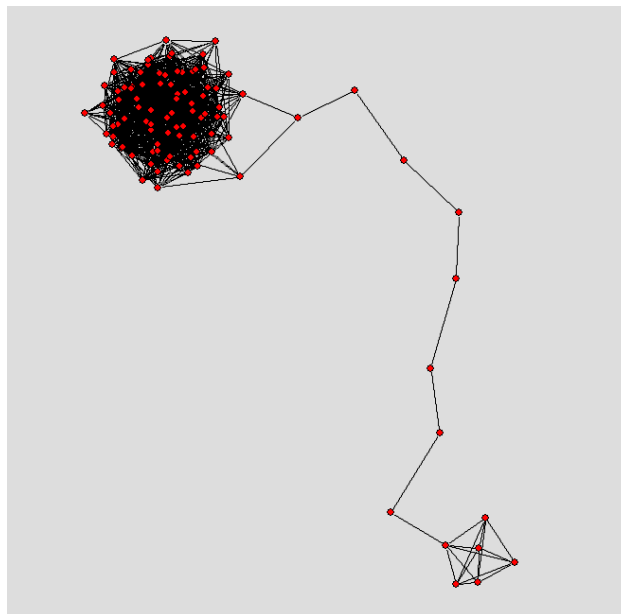


Fig. 6.44: 合意形成に適さないものとして進化最適化された推移確率行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (100node)

みであった。正規化される重み付きとしての固有値特性から、大きな連結部分と小さな連結部分で形成されるラプラシアン行列の場合とは異なる特性をもつネットワークも進化生成されることが分かった。

### 正規化ラプラシアン行列の適応関数

正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づく適応関数について、以下にロリポップ形状のネットワークが進化生成されたコンセンサス、同期問題における合意形成に適さない最適ネットワークを生成設計するための適応関数を示す。

$$E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\alpha \quad (\omega = 1) \quad (6.19)$$

$$E(\omega) = \omega\frac{1}{\lambda_n} + (1 - \omega)\alpha \quad (\omega = 1) \quad (6.20)$$

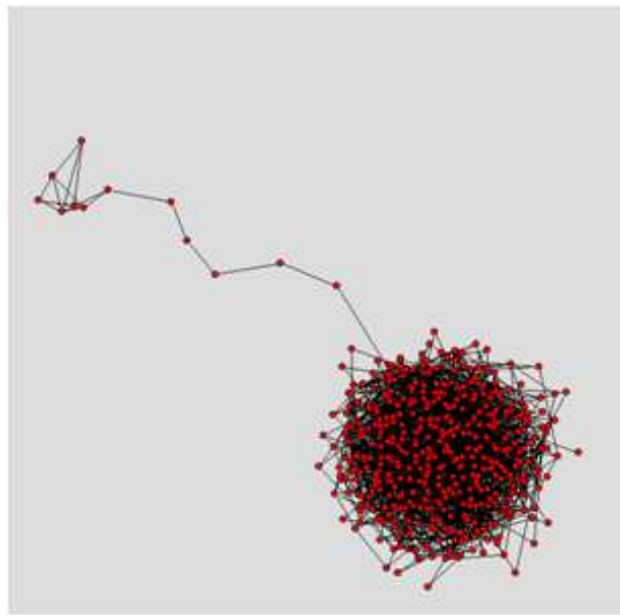
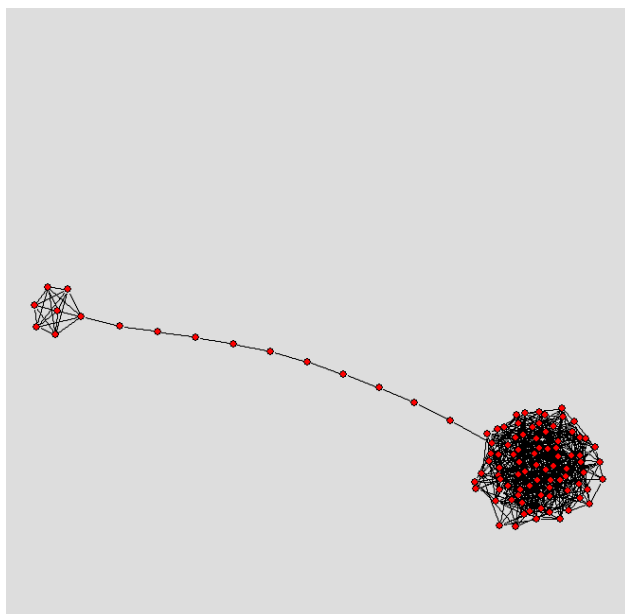


Fig. 6.45: 合意形成に適さないものとして進化最適化された正規化ラプラシアン行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (500node)

ここで Fig. 6.45 に、合意形成に適さないものとして進化最適化された正規化ラプラシアン行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワークを示す。Fig. 6.46 には 100node の場合を示す。

ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて最適化した場合と異なる点として、正規化ラプラシアン行列の場合では、まるで尻尾のように小さく固まった連結部分が形成される特徴がある。これは推移確率行列の場合でもみられた特徴である。ラプラシアン行列の場合では、一つの大きな連結部分を除くと、あとは線状の連結部分があるのみであった。正規化される



**Fig. 6.46:** 合意形成に適さないものとして進化最適化された正規化ラプラシアン行列の固有値によるロリポップ形状の最適ネットワーク (100node)

重み付きとしての固有値特性から、大きな連結部分と小さな連結部分で形成されるラプラシアン行列の場合とは異なる特性をもつネットワークも進化生成され、推移確率行列の固有値特性と共通する性質も存在することが分かる。

## 6.7 代数的連結性のみの最適化による完全連結ネットワーク

これまで、合意形成に適した最適なネットワーク及び合意形成に適さない最適なネットワークを生成設計してきた。そして、適応関数の設定を様々に考察してきた。その多くの適応関数の中で、ラプラシアン行列の第2最小固有値のみの最適化を行う適応関数においては、完全連結ネットワークが進化生成された。その適応関数を以下に示す。

$$E(\omega) = \omega \frac{1}{\lambda_2} + (1 - \omega) \langle k \rangle \quad (\omega = 1) \quad (6.21)$$

このように完全連結ネットワークを進化生成する適応関数は、ラプアシアン行列の場合においてみられた。推移確率行列の第2最大固有値、正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値のみの最適化を行う適応関数においては、完全連結ネットワークは生成されず、これまで説明してきた収束性に比較的優れた最適ネットワークが進化生成された。これは正規化された重み付けの特性が、全連結となるには至らない制約となっていると考えられる。

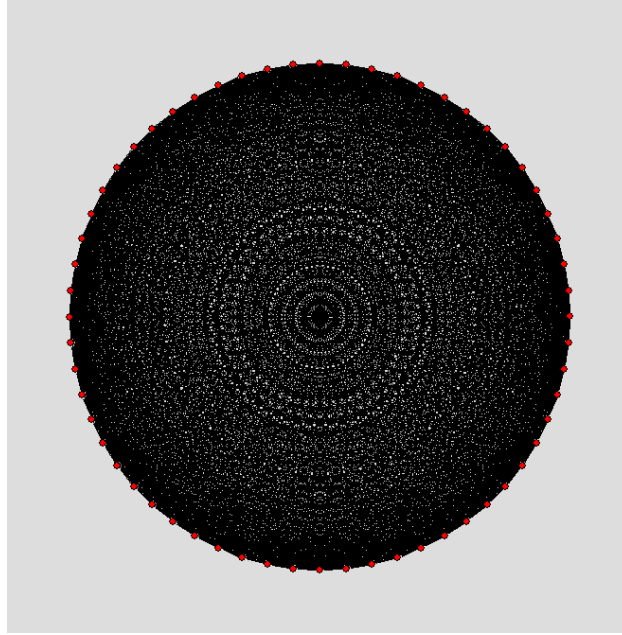


Fig. 6.47: 完全連結ネットワークの例

完全連結ネットワークのラプラシアン行列の固有値は、ノード数  $n$  に縮退するため、以下のようになる。

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_n = n \quad (6.22)$$

推移確率行列においては、 $\mu_1$  を最大固有値として

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = \mu_n = 0 \quad (6.23)$$

となる.

正規化ラプラシアン行列においては,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1 \quad (6.24)$$

となる完全連結ネットワークの特性がある.

これまでの解析を踏まえて考えると, ラプラシアン行列, 推移確率行列, 正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて, 進化手法によりネットワークを最適化することで, コンセンサス, 同期問題において収束性に適した最適ネットワークを目的特性に応じて様々に生成設計できることが分かる.

重み付け  $\omega$  によって生成された最適ネットワーク (100node) のまとめた図を以降に示す.

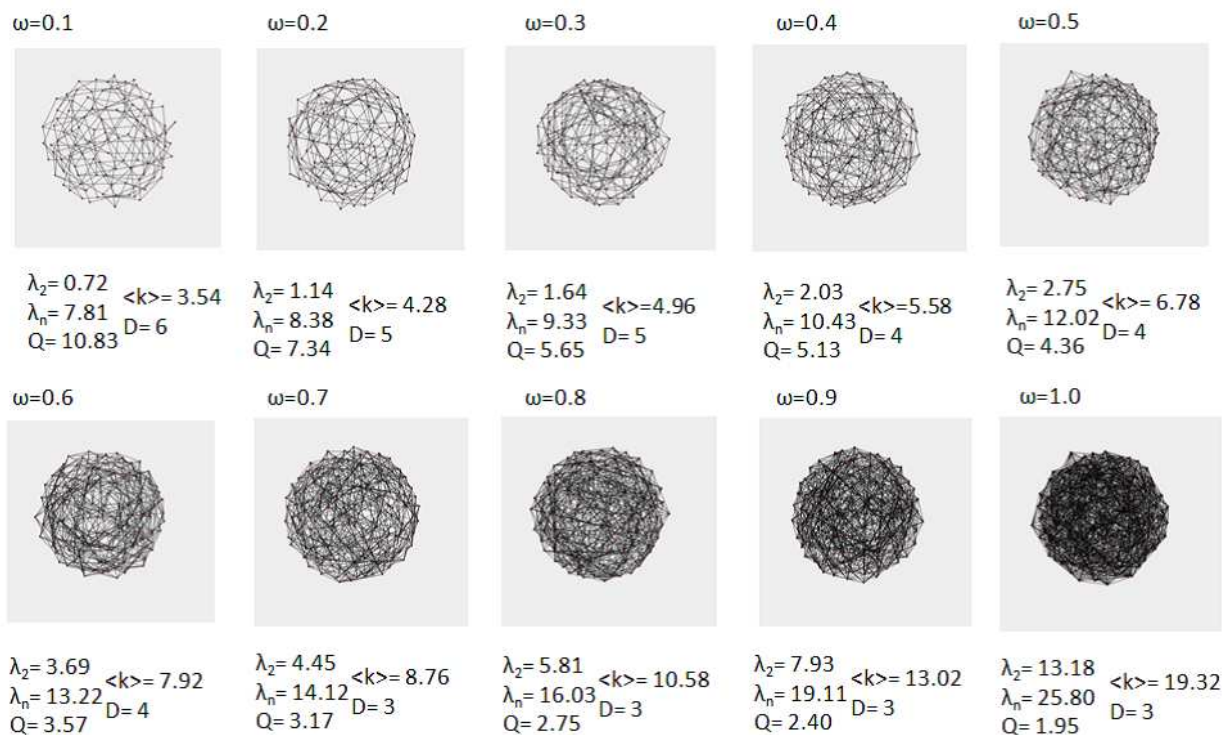


Fig. 6.48: 最適ネットワーク (ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega Q + (1 - \omega) \langle k \rangle$ ) の図

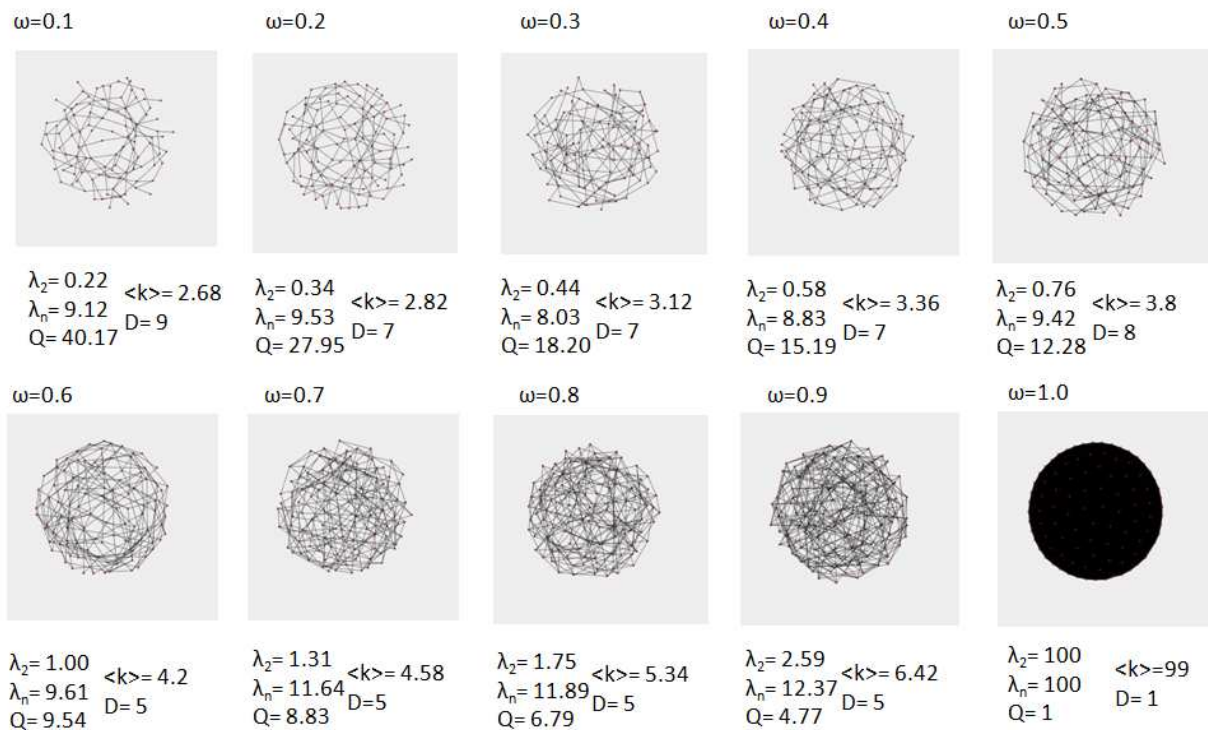


Fig. 6.49: 最適ネットワーク (ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega \frac{1}{\lambda_2} + (1 - \omega) \langle k \rangle$ ) の図



$\omega=0.1$



$\lambda_2 = 0.0019$   $\langle k \rangle = 1.98$   
 $\lambda_n = 6.10$   $D = 51$   
 $Q = 3100.35$

$\omega=0.5$



$\lambda_2 = 0.0021$   $\langle k \rangle = 1.98$   
 $\lambda_n = 6.11$   $D = 43$   
 $Q = 2832.01$

$\omega=0.9$



$\lambda_2 = 0.0019$   $\langle k \rangle = 1.98$   
 $\lambda_n = 6.38$   $D = 42$   
 $Q = 3290.20$

$\omega=1.0$



$\lambda_2 = 0.0041$   $\langle k \rangle = 5.92$   
 $\lambda_n = 17.09$   $D = 29$   
 $Q = 4119.41$

Fig. 6.50: 最適ネットワーク (ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\langle k \rangle$ ) の図.  $E(\omega) = \omega\frac{\lambda_2}{\lambda_n} + (1 - \omega)\langle k \rangle$ ,  $E(\omega) = \omega\lambda_n + (1 - \omega)\langle k \rangle$ ,  $E(\omega) = \omega\frac{1}{\lambda_n} + (1 - \omega)\langle k \rangle$  については木構造の最適ネットワークが生成される.

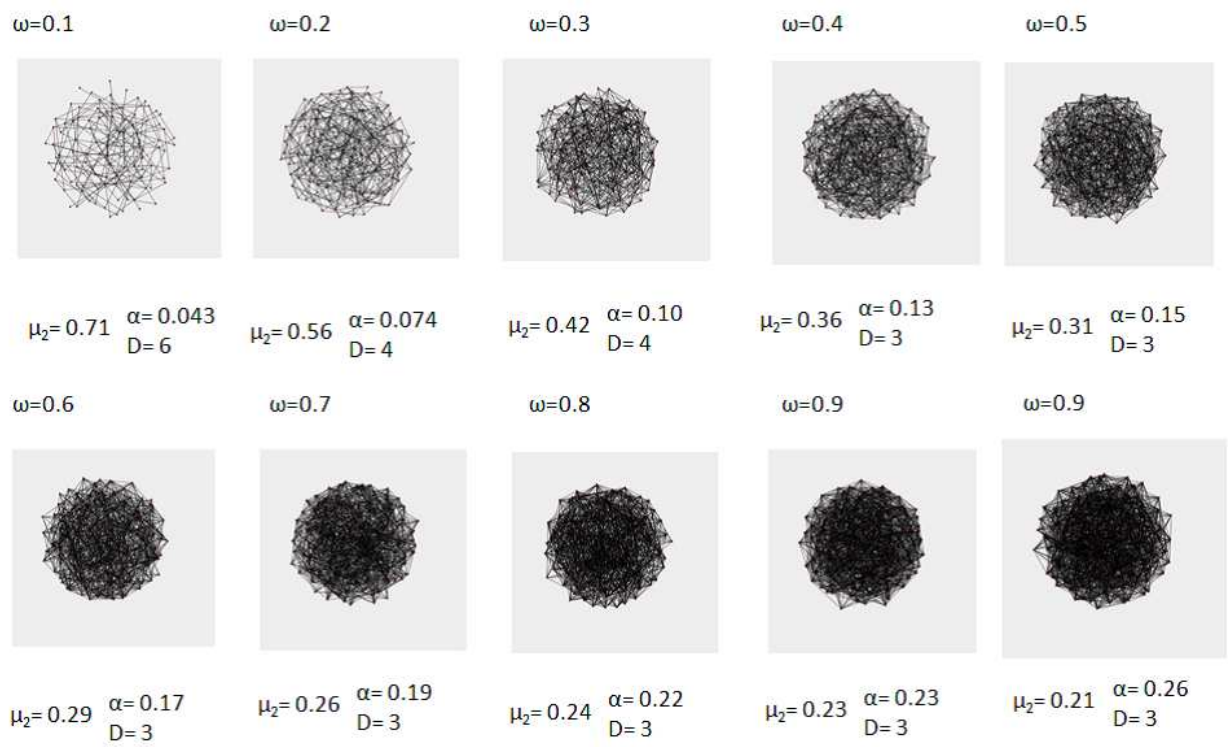
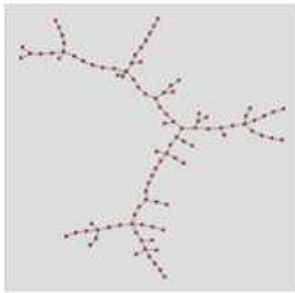


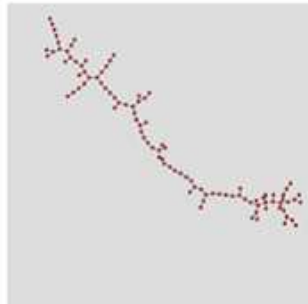
Fig. 6.51: 最適ネットワーク (推移確率行列  $E(\omega) = \omega\mu_2 + (1 - \omega)\alpha$ ) の図

$\omega=0.1$



$\mu_2 = 0.99$   $\alpha = 0.02$   
 $D = 37$

$\omega=0.5$



$\mu_2 = 0.99$   $\alpha = 0.02$   
 $D = 52$

$\omega=0.9$



$\mu_2 = 0.99$   $\alpha = 0.02$   
 $D = 51$

$\omega=1.0$



$\mu_2 = 0.99$   $\alpha = 0.22$   
 $D = 11$

Fig. 6.52: 最適ネットワーク (推移確率行列  $E(\omega) = \omega \frac{1}{\mu_2} + (1 - \omega)\alpha$ ) の図

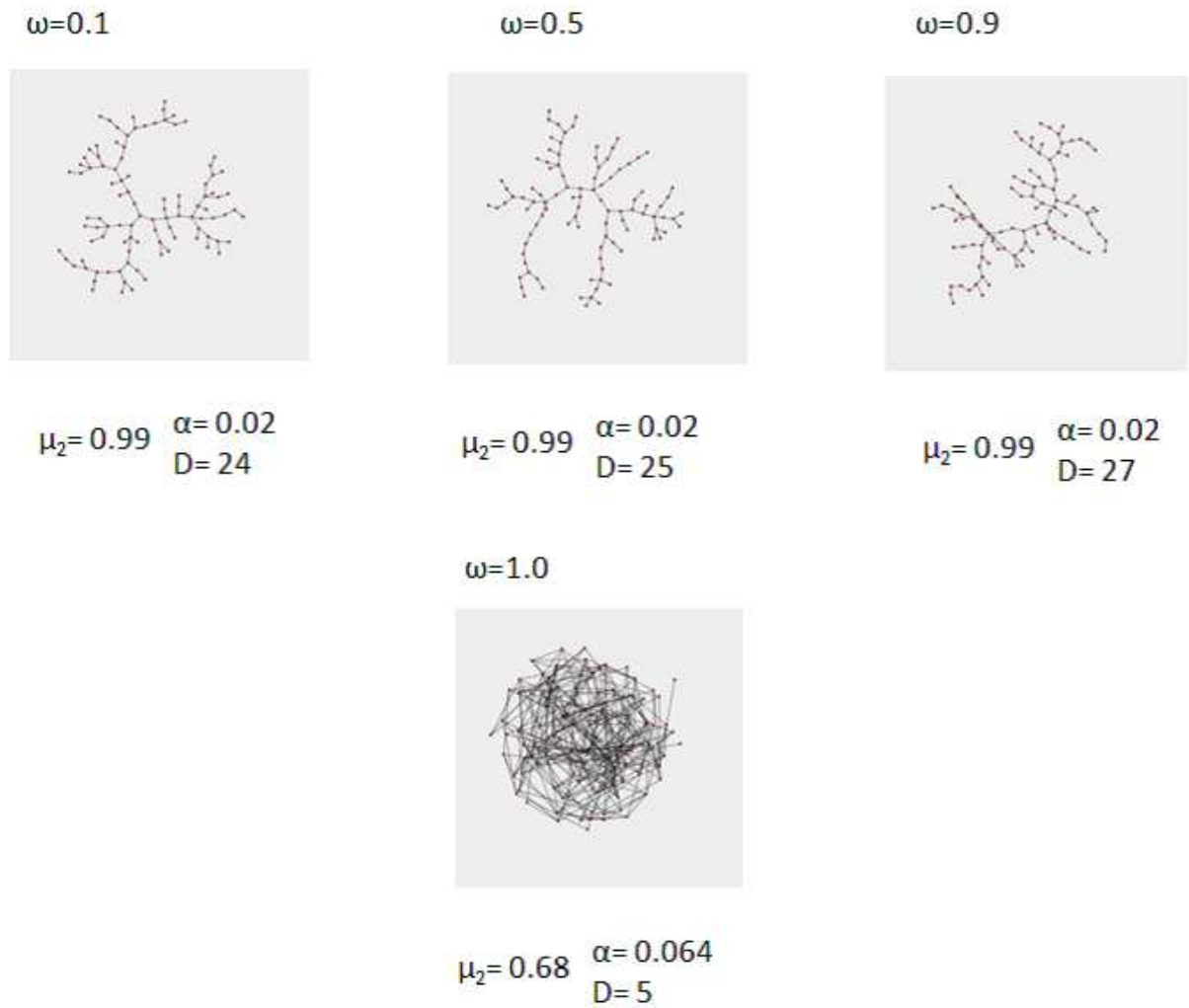


Fig. 6.53: 最適ネットワーク (推移確率行列  $E(\omega) = \omega\mu_1 + (1-\omega)\alpha$ ) の図.  $E(\omega) = \omega\frac{1}{\mu_1} + (1-\omega)\alpha$  も同様な最適ネットワークが生成される.

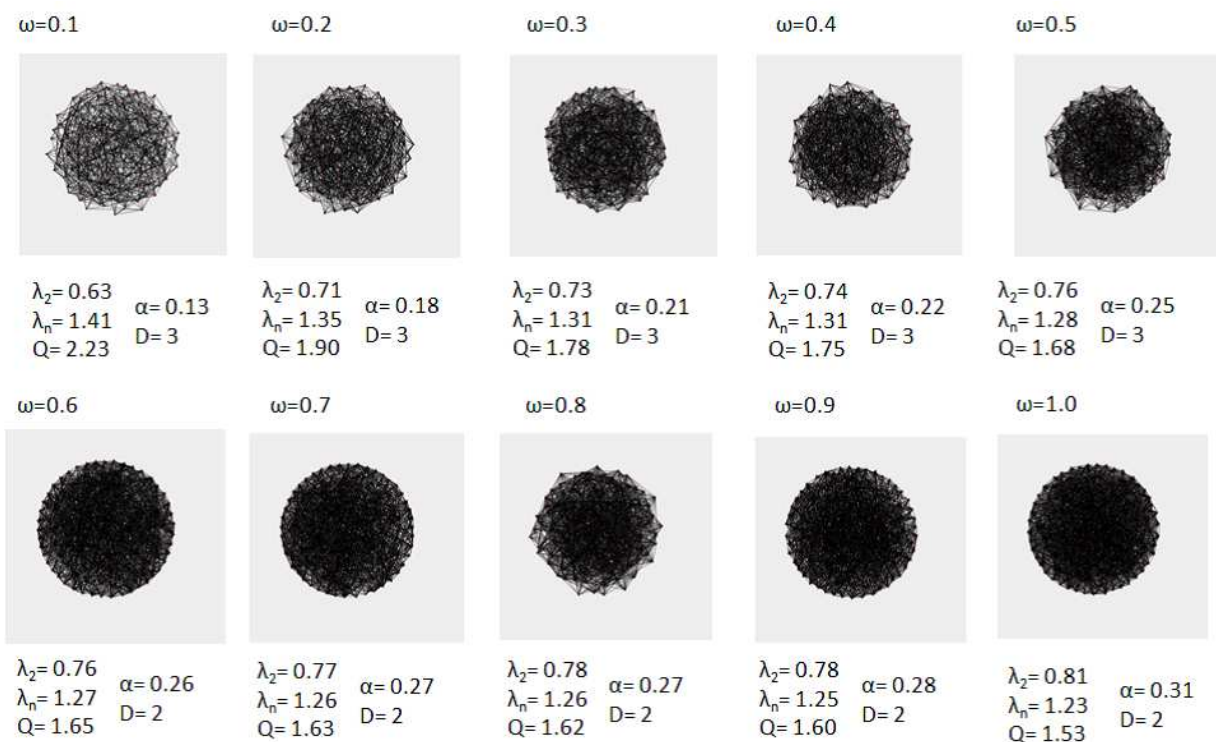


Fig. 6.54: 最適ネットワーク (正規化ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega Q + (1 - \omega)\alpha$ ) の図

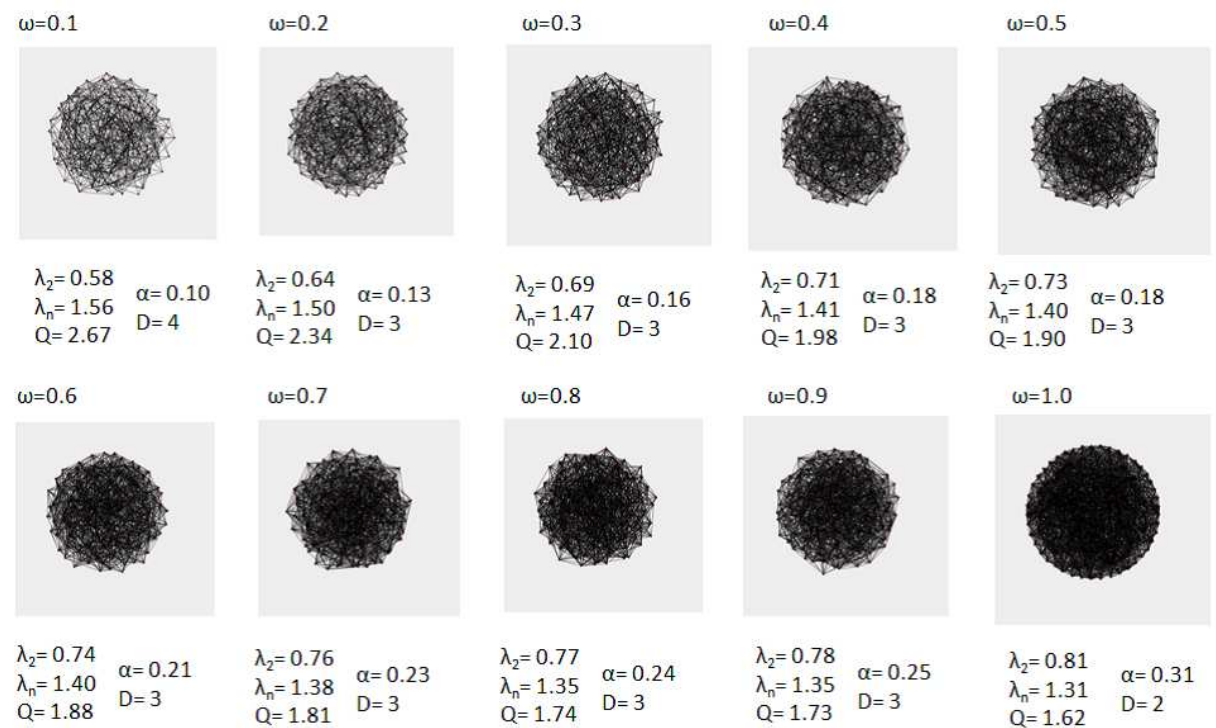


Fig. 6.55: 最適ネットワーク (正規化ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega \frac{1}{\lambda_2} + (1 - \omega)\alpha$ ) の図

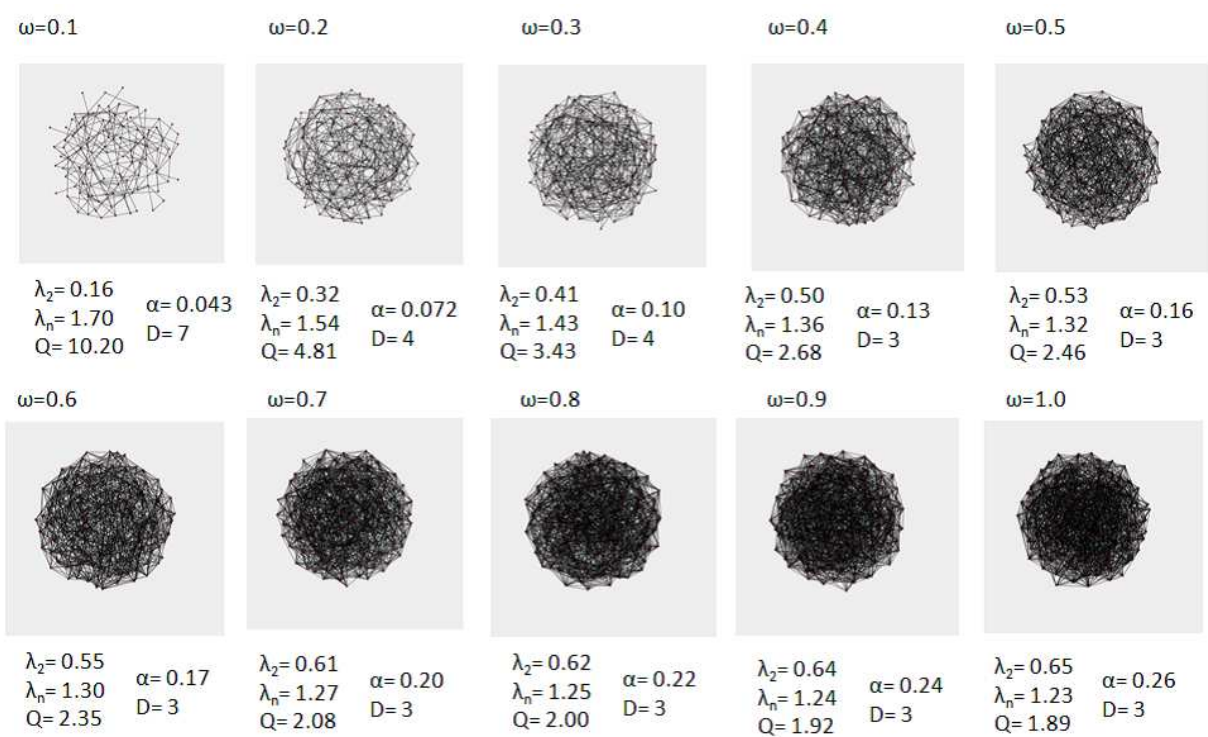


Fig. 6.56: 最適ネットワーク (正規化ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega\lambda_n + (1 - \omega)\alpha$ ) の図

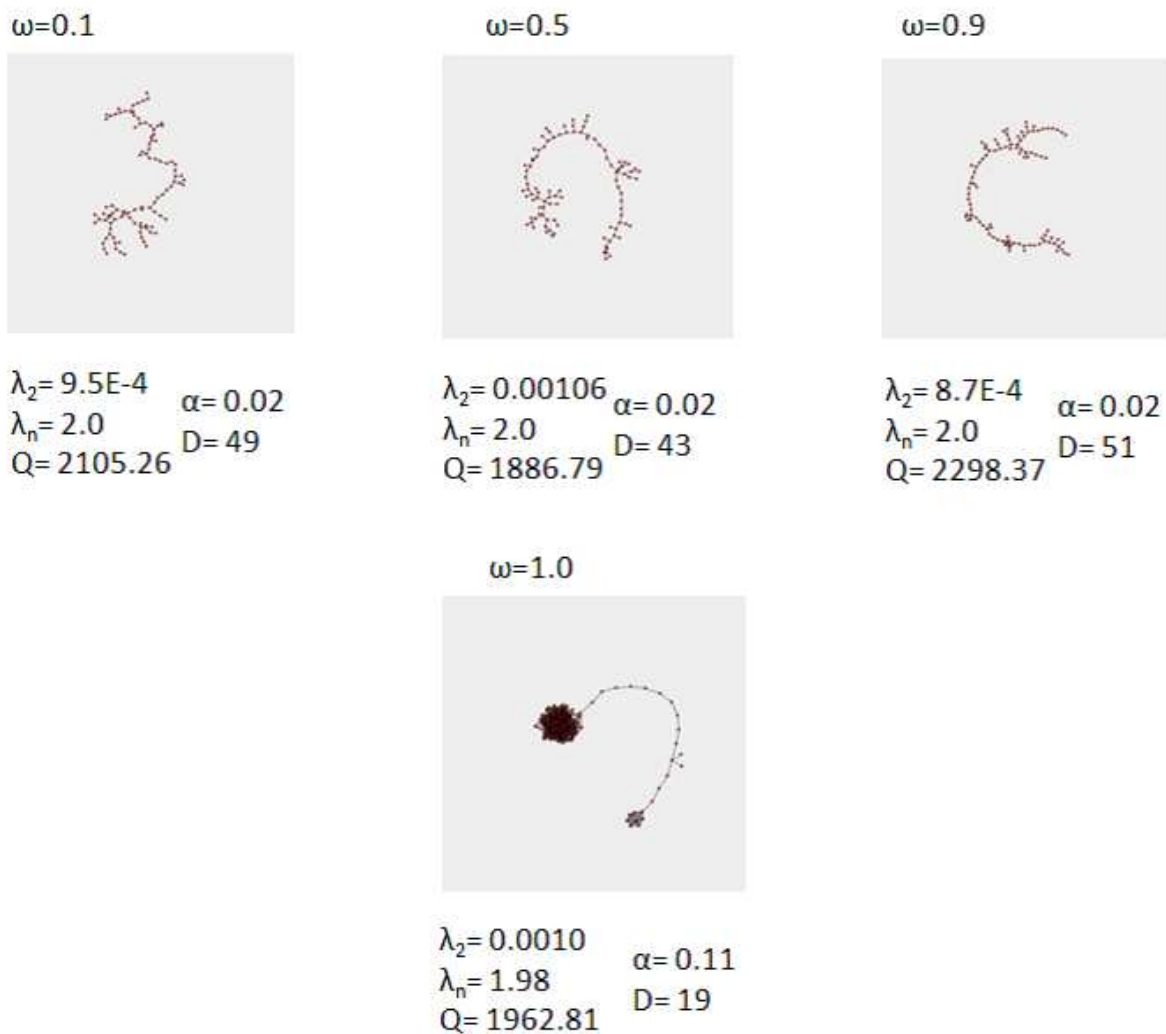


Fig. 6.57: 最適ネットワーク (正規化ラプラシアン行列  $E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\alpha$ ) の図.  $E(\omega) = \omega\frac{1}{\lambda_n} + (1 - \omega)\alpha$  も同様な最適ネットワークが生成される.  $E(\omega) = \omega\frac{\lambda_2}{\lambda_n} + (1 - \omega)\alpha$ ,  $E(\omega) = \omega\lambda_2 + (1 - \omega)\alpha$  については木構造の最適ネットワークが生成される.

## 6.8 進化手法によるコンセンサス、同期問題における最適ネットワーク生成のまとめ

本研究では、進化的アルゴリズムにより、リンク密度とネットワークのラプラシアン行列の固有値に基づいて、最適なネットワークを提案した。進化手法によるネットワークの最適化が、コンセンサス、同期問題に対して従来優れたネットワークモデルとされるスモールワールドネットワーク、ランダムネットワーク、ランダムレギュラーネットワークよりも優れたものを生成し、より代数的連結性が高く、収束性に優れたネットワークとなることを示した。そして、ラプラシアン行列の第2最小固有値  $\lambda_2$  とリンク密度に基づく最適ネットワークにおいて、従来モデルで最も優れたネットワークモデルであるランダムレギュラーネットワークよりも優れたネットワークが生成された。そして  $Q(\text{condition number})$  とリンク密度に基づく最適ネットワークにおいては、さらに優れたネットワークが進化生成され、最も収束性に優れた特性を示した。

これらのことから、進化手法による最適ネットワークの生成設計が、従来有効ネットワークモデルよりも優れた最適な収束性をもつネットワークを得ることができることが分かった。そしてスケールフリーネットワークを含めた各種ネットワークにおける固有値の推移や分布から、これらの特性の解析を行い、従来ネットワークモデル及び最適ネットワーク構造の意味について深く探求していった。

そしてリンク密度と推移確率行列、正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて、重み付きにおけるネットワークを考え、進化手法により最適ネットワークを生成設計した。その固有値特性による解析から、これらの推移確率行列、正規化ラプラシアン行列における進化手法により生成設計された最適ネットワークも従来有効ネットワークモデルよりも優れた特性をもつことを示した。それらのネットワークの構造特性を解析すると共に、重み付きにおけるネットワークにおいて、コンセンサス、同期問題において適さない最適ネットワークの生成設計も行い、その構造特性と意義についても探求を行った。

コンセンサス、同期問題は自然界における集団行動や同期現象、多数のエージェントの協調制御、ネットワーク構築設計等、多様な問題と関連したものである。様々な諸問題と関連するコンセンサス、同期問題に対する最適なネットワーク設計の構造の一つとして、本研究における提案ネットワークは、その意義と有効性を示しうるものである。

今後の課題としては、本研究における最適ネットワーク特性やそれぞれのネットワークにおける特性の解析をより深めていき、これらのネットワーク構造の意味をより探求していくと共に、コンセンサス、同期問題以外の他の問題特性における最適ネットワークの生成設計を行っていくことが考えられる。



## 第7章 情報伝達，伝播拡散

本章では，複雑ネットワークにおける重要な研究対象の一つである情報伝達，伝播拡散について説明を行っていく．そして情報伝達，伝播拡散の特性において重要な関連がある隣接行列の最大固有値とネットワーク特性について述べる．

### 7.1 情報伝達，伝播拡散とネットワーク特性

情報伝達，伝播拡散に関するネットワークの研究は，これまで世界中で様々な視点や手法をもって多くの研究がなされている．情報通信ネットワークの分野<sup>104,105)</sup>のみならず，複雑ネットワーク科学の高まりとも併せて，スケールフリー，ランダムネットワーク，スモールワールドといった，生命体の構造<sup>106,107)</sup>，浸透や自然現象<sup>38,108,109)</sup>，社会特性や戦争<sup>110,111)</sup>，流通や繋がり<sup>112-114)</sup>，疫学<sup>9,115,116)</sup>，伝播拡散<sup>111,117,118)</sup>等に至るまで様々なネットワーク構造を考慮にのべての研究が盛んに報告されている．情報伝達，伝播拡散の優れた最適なネットワークとは何かという命題に答えるためには，例えば情報通信分野では，通信効率が良く，混雑しない両方の利点があるという特性が必要である．

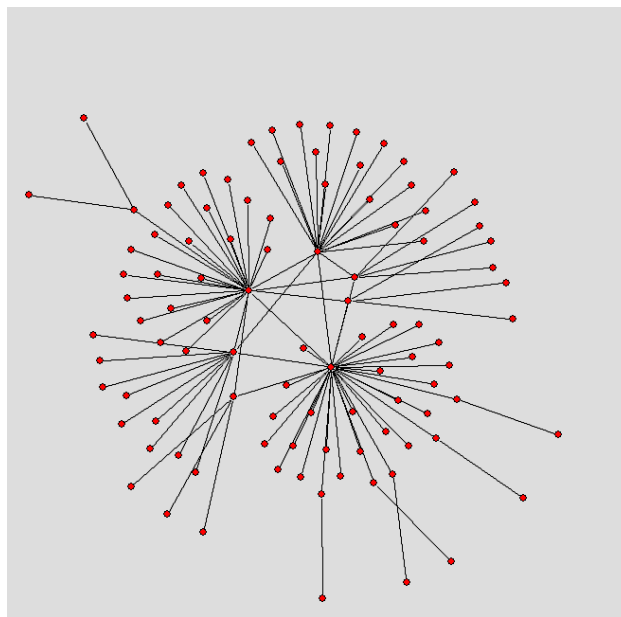


Fig. 7.1: マルチスターネットワーク

これまでの従来研究を踏まえると，現在のインターネットのネットワーク構造では，ハブ

ノードをもつネットワークは、パケット生成率が低ければ、リンク制約が低い所で、パケット生成率が高ければ、リンク制約が高い所で混雑が生じる<sup>104)</sup>。これはパケット生成率が高ければ、リンク制約も高くなければならぬことを意味している。その結果、頻繁に使用されるネットワークほどリンクが追加され、このために、リンク制約がより重要となる。

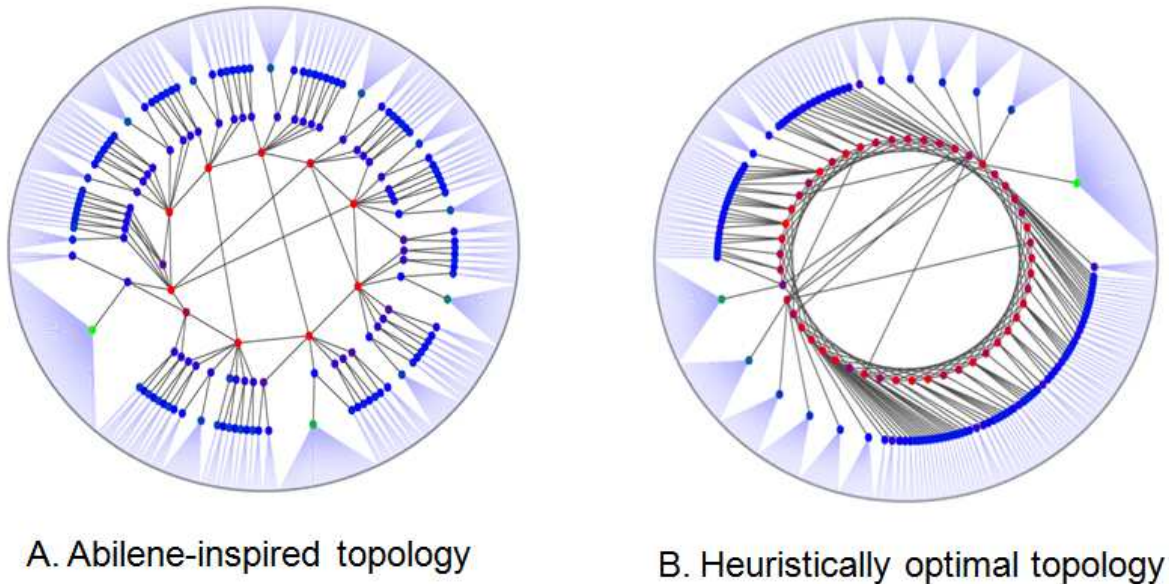


Fig. 7.2: HOT ネットワーク

そして通信効率が良く、混雑しにくいネットワークは、中心部ノードにコア構造がある<sup>119)</sup>。これは、リンク数の制約条件下において、中心部での混雑度を低減させるためには、ハブ構造が適していることを意味する。このようなネットワーク構造は、ハブ同士が繋がりコアを形成しており、ハブには2階層以上の構造を持っている。いくつかのスター型ネットワークが繋がったネットワーク構造は、トラヒックの混雑を減らす特性がある。

混雑度とリンク密度を少なくするネットワーク例として Fig. 7.1 に示すようなマルチスターネットワークがある。スター型ネットワークは、ハブノードの **betweenness** が高くなるため、ハブノードの負荷が極めて高くなる。そのため、ハブ同士が繋がっていると、そこにトラヒックボトルネックが生じてしまう。結局、コア構造だけでは、トラヒックボトルネックを無くすことはできないことから、階層構造の存在が重要になる。このことから、インターネットのようにトラヒックの効率性と混雑度の両方を考えた効果的なネットワークは、中央部のコア構造と階層構造を両方を持つことになる。これによってハブノード間で **betweenness** を分散させ、パケットの集中化を抑えることができる。

マルチスターネットワークは、スター型ネットワークの特性をもちながら、トラヒックの混雑を減らすことができる。このようなネットワーク構造の例として HOT モデル<sup>104)</sup> がある。HOT モデルは、ルータ数の制約下でネットワークのスループットを最大にするネットワークで、バックボーンには階層的なツリー構造のメッシュコアを持っている (Fig. 7.2)。

## 7.2 ネットワーク上での情報伝達，伝播拡散プロセスと隣接行列の最大固有値

これまでみてきたように，通信効率が良く，混雑緩和に適したネットワークは，中央部のコア構造と階層構造を持っていることが重要な特性である．本研究では，これを考慮した上で，進化手法を用いて最適なネットワークを生成設計する．最適なネットワークを求めるため，隣接行列の固有値特性を踏まえ，最適化を行う．ネットワークを固有値の視点により探求していくことは，3章において述べたラプラシアン行列の固有値に基づいたコンセンサス，同期問題をはじめ，ネットワーク上の特性をみる上で有効な手法である．そして，固有値がネットワーク上の特性を表す指標として有効なものであり，固有値を目的の特性に合うように進化手法により最適化することによって，その特性に適したネットワークを生成設計することができる．隣接行列の最大固有値は，伝播拡散，感染症問題でも有効な指標として考えられている<sup>8,9)</sup>．感染症はSIRモデルをはじめ，多くの研究がなされてきたが，感染爆発が起こる閾値 (threshold) が存在し，スケールフリーネットワークのようなハブノードを持つネットワークは，その閾値が小さく，感染爆発が生じやすい．このことは，平均次数によって，スケールフリーネットワーク，ランダムネットワークも含め閾値を表すことができる<sup>117)</sup>．

ここで閾値を $\lambda_c$ とし，各ノードが同じ次数を持つレギュラーネットワークのような均質なネットワークやランダムネットワークの閾値を平均次数 $\langle d \rangle$ を用いて表すと，

$$\lambda_c = \frac{1}{\langle d \rangle} \quad (7.1)$$

となる．一方，スケールフリーのようなハブノードが存在し，ノードの次数分布がべき分布に従い，各ノードにより次数が大きく異なる，非均質なスケールフリーネットワークの閾値 $\lambda_c$ は，次数の二乗平均を $\langle d^2 \rangle$ として

$$\lambda_c = \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle} \quad (7.2)$$

と表され，ハブノードのような次数の大きいノードの存在により，次数の二乗平均の値が非常に大きくなるため，閾値 $\lambda_c$ は小さくなり，感染爆発が起こりやすいネットワーク構造となる．

感染爆発が起こる閾値について，これまでの研究は，次数を中心として捉えているものが数多く存在する．この意味をさらに深めると，それは隣接行列の固有値とも関連がある．感染症における多くの研究の中で，SIS，SIRモデルは代表的な著名モデル<sup>120)</sup>であるが，Sは感染していない状態を表し，Iは感染している状態を表す．またRは治癒し，もうその伝染病には罹患しないという状態または隔離状態等を表す．

状態Sのノードは，ネットワーク上で状態Iのノードと繋がっていれば，確率 $\beta$ で状態Iとなる（つまり罹患する）．また状態Iのノードは，確率 $\delta$ で状態Sとなる（SISモデルの場合

合) または状態 **R** となる (SIR モデルの場合) .

SIR モデルにおける場合を微分方程式で表すと,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \delta I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) = \delta I(t) \end{cases} \quad (7.3)$$

となる.

SIS モデルにおける場合を微分方程式で表すと,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) + \delta I(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \delta I(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

となる.

このことは感染症のみならず, インターネット等のコンピュータネットワーク構造, 人々の繋がり, 情報の伝達, 文化, 流言の伝播拡散, 流通, 自然災害の広がり等の自然科学特性解析に至るまで視野の拡大と応用に繋がるものでもある. 次にその様々な特性と関連が大きなネットワーク構造における隣接行列の最大固有値の意味を説明する.

あるエージェント  $i$  が時刻  $t$  に, ある情報を認知している確率を  $p_i(t)$  とし, エージェント集団における認知状態をその列ベクトル  $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t))$  として表すと, その全体認知状態の推移は次式で定義される. ここで  $I$  は単位行列である.

$$\mathbf{p}(t+1) = (\beta A + (1-\delta)I)\mathbf{p}(t) \quad (7.5)$$

隣接行列の最大固有値を  $\lambda_n(A)$  とすると, 行列  $S = \beta \lambda_n(A) + (1-\delta)I$  を用いて次式が定義される.

$$\lambda_i(S) = \beta \lambda_i(A) + (1-\delta)I \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7.6)$$

ここで  $\lambda_i(S)$  は行列  $S$  の  $i$  番目の最大固有値である. 特に, 最大固有値を  $\lambda_n(S)$  について

$$\begin{cases} (i) \lambda_n(S) < 1 & \mathbf{p}(t) \text{ は } \mathbf{0} \text{ へ収束} \\ (ii) \lambda_n(S) = 1 & \mathbf{p}(t) \text{ は定数へ収束} \\ (iii) \lambda_n(S) > 1 & \mathbf{p}(t) \text{ は無限大へ発散} \end{cases} \quad (7.7)$$

が成り立つ. よって式 (7.6) の関係と式 (7.7) の条件において, 行列  $S$  は, 隣接行列  $A$  の最大固有値を用いて次のように表される.

$$\begin{cases} (i) \frac{\beta}{\delta} < \frac{1}{\lambda_n(A)} & \mathbf{p}(\mathbf{t}) \text{ は } \mathbf{0} \text{ へ収束} \\ (ii) \frac{\beta}{\delta} = \frac{1}{\lambda_n(A)} & \mathbf{p}(\mathbf{t}) \text{ は定数へ収束} \\ (iii) \frac{\beta}{\delta} > \frac{1}{\lambda_n(A)} & \mathbf{p}(\mathbf{t}) \text{ は無限大へ発散} \end{cases} \quad (7.8)$$

このことから、ネットワーク構造における伝播拡散の感染爆発や拡散の全体への広がりが起こるという現象について、それが成立する閾値は次式の関係がある。

$$\frac{\beta}{\delta} > \frac{1}{\lambda_n(A)} \quad (7.9)$$

よって  $\frac{\beta}{\delta}$  の値が大きいほど、そして隣接行列の最大固有値が大きいほど、伝播拡散の全体への広がりは起こりやすくなるという関係が成立する。ここに隣接行列の最大固有値がネットワーク構造の伝播拡散を左右する特性をもっているという重要な特性があることが分かる。

そしてこの隣接行列の最大固有値は、先に述べたようにネットワークの次数とも相関があり、レギュラーネットワークのようにノードが同じ次数をもった均質なネットワークの隣接行列の最大固有値は、次数を  $d$  とすると

$$\lambda_n(A) = d \quad (7.10)$$

となる。また、中心に1つのハブノードをもつスター型ネットワークの隣接行列の最大固有値は、

$$\lambda_n(A) = \sqrt{d_{central}} \quad (7.11)$$

となり、ここで  $d_{central}$  は中心ノードの次数である。スケールフリーネットワークについては、

$$\lambda_n(A) = \sqrt{d_{max}} \quad (7.12)$$

となる。ここで  $d_{max}$  はノードの最大次数である。よってスケールフリーネットワークはハブノードが存在し、 $d_{max}$  が大きくなると共に、大きな隣接行列の最大固有値をもつため、ネットワーク全体への伝播拡散が起こりやすいネットワーク構造となる。これは、先にみた式(7.1), 式(7.2)とも対応がとれるものであり、隣接行列の最大固有値がネットワーク構造における重要な特性をもっていることが分かる。よって隣接行列から得られる知見により、情報伝達、伝播拡散の優れたネットワーク<sup>121-123)</sup>、そして感染症の流行<sup>124, 125)</sup> コンピューターウィルス拡散<sup>126-128)</sup> 等を抑えることや伝播拡散に適さないネットワーク設計の指針といった様々な社会特性の応用へと繋がるものが考えられる。

以上をまとめると、ネットワーク構造において、情報伝達、感染爆発や伝播拡散のネットワーク全体への広がりが起こる閾値  $\lambda_c$  は、

$$\lambda_c = \frac{1}{\lambda_n(A)} \quad (7.13)$$

で表される．この意味するところは，隣接行列の最大固有値の値が大きければ大きいほど，感染爆発が起こりやすいネットワークとなり，小さければ小さいほど感染爆発は起こりにくく，終息しやすいネットワークとなる．

このように隣接行列の最大固有値からネットワークにおける情報伝達，伝播拡散に対して根底構造を捉えていくことができ，ネットワークをみていく上で，重要な指標であるといえる．本研究においては，このようなネットワーク構造と深い関連のある隣接行列の最大固有値特性に基づいた視点により最適ネットワークの生成設計を行い，その構造特性を捉えていく．

## 第8章 情報伝達，伝播拡散の最適ネットワークの生成設計

ここでは，情報伝達，伝播拡散において最適な特性をもつネットワークを生成する．進化的手法を用いて，最適なネットワークを生成設計する．情報伝達，伝播拡散ネットワークにおいて，隣接行列の最大固有値が重要な役割をもつという特性があり，それに基づいてリンクコストの最小化の制約を加えながら，情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークを進化生成させ，その構造を明らかにする．最適化のための適応関数としては，情報伝達，伝播拡散の指標であるネットワークの隣接行列の最大固有値とリンク密度の2つの組合せを考え，ネットワークの隣接行列の最大固有値の最大化，最小化とネットワーク生成コストの最小化を目指して最適なネットワークを進化生成させる．それにより，情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークとそれに適さないネットワークを進化生成させる．

### 8.1 適応関数の定義

ここでは，5章でラプラシアン行列による適応関数を定義したように，隣接行列の適応関数を定義する．そして適応関数に基づき，進化手法により最適ネットワークの生成設計を行う．進化的アルゴリズムで最適化する重み付き評価関数の設定としては，隣接行列においては，最大固有値  $\lambda_n$  が情報伝達，伝播拡散に関する特性がある．従って，それを考慮した隣接行列の固有値特性による最適化する適応関数は， $\lambda_n$  と式(5.3)式の2つを重み付けした式で与えられる．

#### 8.1.1 隣接行列の固有値

情報伝達，伝播拡散の特性を示す指標として重要な役割を果たすのが隣接行列の最大固有値である．ネットワークの隣接行列  $A = [a_{ij}]$  において，それぞれ最小の固有値から最大の固有値までを次式で表す．

$$\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \cdots \geq \lambda_1. \quad (8.1)$$

最大固有値は  $\lambda_n$  であり，隣接行列の最大固有値として  $\lambda_n(A)$  を定義する．情報伝達，伝播拡散の優れたネットワークの構造において，隣接行列の最大固有値が重要な役割をもつとい

う特性があり，それに基づいてリンクコストの最小化の制約を加えるという評価関数に基づいてネットワークを進化生成させる．後述する隣接行列の固有値の意味からして，その最適化によるネットワーク生成は，伝播拡散ネットワークの最適構造をみていく上で重要な意義がある．次にネットワーク進化生成のための評価関数について説明する．

### 8.1.2 重み付き評価関数の設定

進化アルゴリズムで最適化する評価関数は式(5.1)と隣接行列の最大固有値の間に重み付けで表す． $\omega(0 \leq \omega \leq 1)$ は，適応関数を線形結合するパラメータである．式(8.2), 式(8.3)において， $\omega = 0$ とした場合は，リンク密度の最小化，一方で， $\omega = 1$ とした場合は，ネットワークの隣接行列の最大固有値に関する関数のみを最小化する問題になる．そして情報伝達，拡散についての最適化を行うための評価関数として， $\lambda_n(A), \langle k \rangle$ により，

$$E(\omega) = \omega \lambda_n(A) + (1 - \omega) \langle k \rangle \quad (8.2)$$

$$E(\omega) = \frac{\omega}{\lambda_n(A)} + (1 - \omega) \frac{\langle k \rangle}{(N - 1)} \quad (8.3)$$

を定める． $N$ はネットワークのノード数である．この評価関数の式(8.2)によって，隣接行列の最大固有値 $\lambda_n(A)$ を最小化するよう進化させた場合と評価関数の式(8.3)によって，最大化するよう進化させた場合に分けて示す．



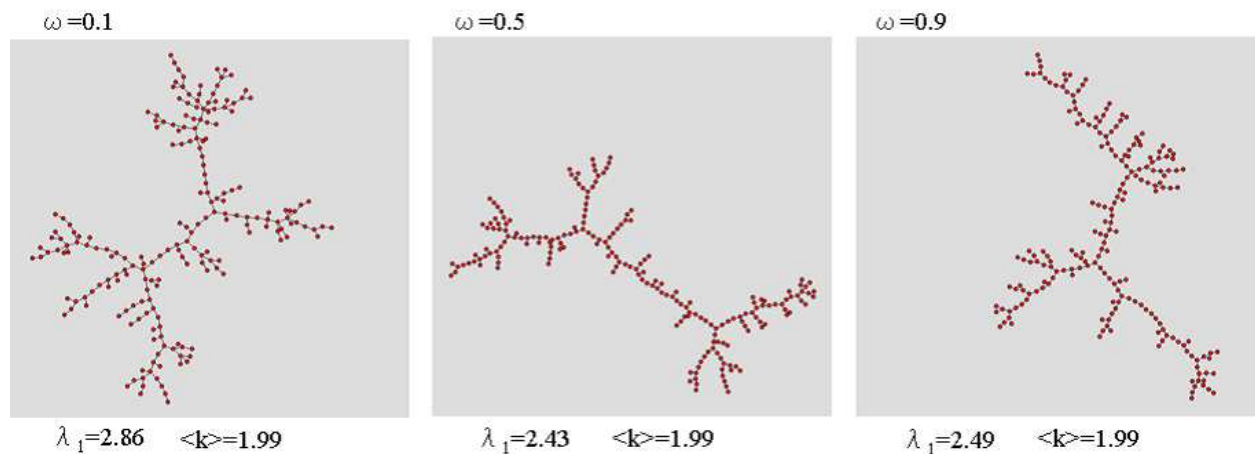


Fig. 8.1: 情報伝達，伝播拡散の最小化による最適ネットワーク

## 8.2 最適ネットワークの生成設計

### 8.2.1 初期ネットワーク

初期ネットワークはランダムネットワークであり，各ノード当たり，平均リンク数は7で，ポアソン分布に従って生成させる．このようなランダムネットワークを初期条件として，遺伝的アルゴリズムを適用し，適応関数によって最適ネットワークを進化生成設計する．

### 8.2.2 情報伝達，伝播拡散の最小化

隣接行列の最大固有値  $\lambda_n(A)$  を最小化するように進化させた場合を Fig. 8.1 に示す．ノード数は200である．

評価関数の式 (8.2) により，重み付け  $\omega = 0.1$  から  $\omega = 1.0$  まで，それぞれ行った結果，全てにおいて木構造ネットワークが進化生成された．これにより，情報伝達，伝播拡散に適さないネットワークは，木構造ネットワークであることが分かる．

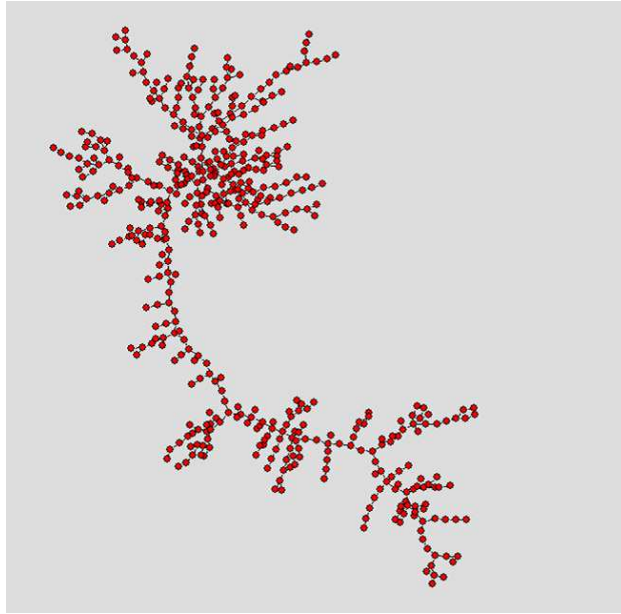


Fig. 8.2: 情報伝達，伝播拡散の最小化による最適ネットワーク (500node)

また，Fig. 8.2に500ノードの場合を示す．

Fig. 8.2に示すように500ノードにおいても木構造をもつネットワークが進化生成された．隣接行列の固有値特性としての最大固有値が非常に低く，情報伝達，伝播拡散の起こりにくいネットワーク構造として進化生成されている．このようなネットワークは，情報伝達，伝播拡散を抑えることを目的としたネットワーク設計モデルの一つともなりうるものであると考えられる．

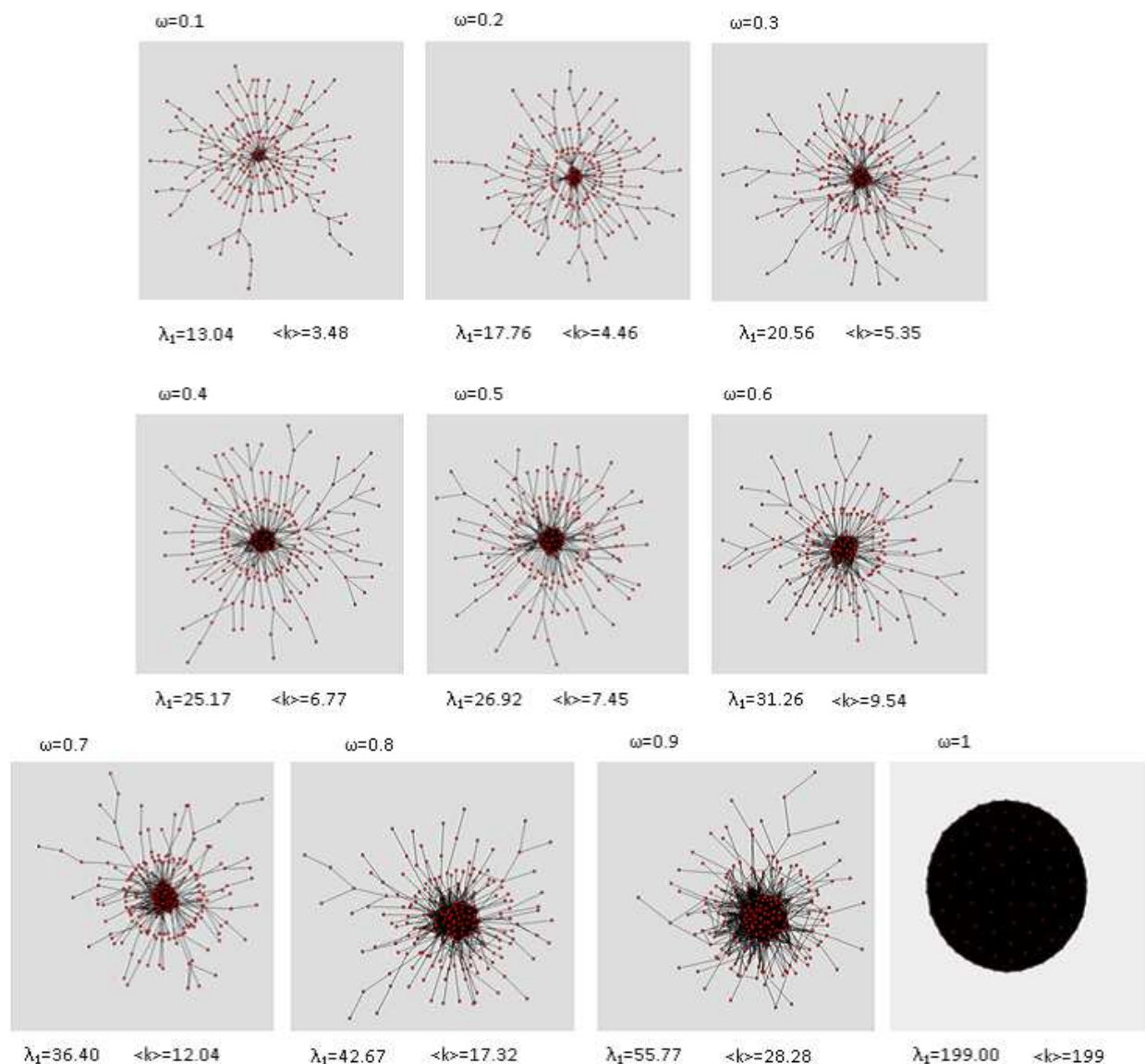


Fig. 8.3: 情報伝達，伝播拡散の最大化による最適ネットワーク

### 8.2.3 情報伝達，伝播拡散の最大化

隣接行列の最大固有値  $\lambda_n(A)$  を最大化するよう進化させた場合を Fig. 8.3 に示す．ノード数は 200 である．

評価関数の式 (8.3) により，重み付け  $\omega = 0.1$  から  $\omega = 1.0$  まで，隣接行列の最大固有値  $\lambda_n(A)$  を最大化したネットワークの結果をみると，ネットワークの中心から整った階層構造が出来はじめ，中心にいくほどリンク密度が高いコア構造と対応するネットワークが進化生成された．通信効率が良く，混雑しにくい利点がある特性をもつネットワークは，中央部のコア構造と階層構造を持っている特性とも対応している．最適ネットワークのコア構造による高密度性と中心へと向かう整った階層構造は，HOT モデルのようなメッシュコアとも異なり，マルチスター型ネットワークやスケールフリーネットワークとも次数，構造が異なるも

のが生成されている。

中心にいくほど、高密度リンクとなり、階層構造により成り立っているという特性は、さらにノード数を増やして進化生成させた500ノードの場合のネットワークFig. 8.4においてもより現れている。

本研究における隣接行列の最大固有値に基づく最適化により生成されたネットワークは、スケールフリー、ランダムネットワーク、スモールワールド等の従来研究されてきたネットワークの型で一概に捉えられない特性をもっている。階層性やコア構造による中心密度性といったフラクタル性、自己相似性、社会的な組織特性とも関連した特性を備えており、このネットワークは、多様な問題と関連した情報伝達、伝播拡散ネットワークの設計モデルの一つともなりうるものであると考えられる。

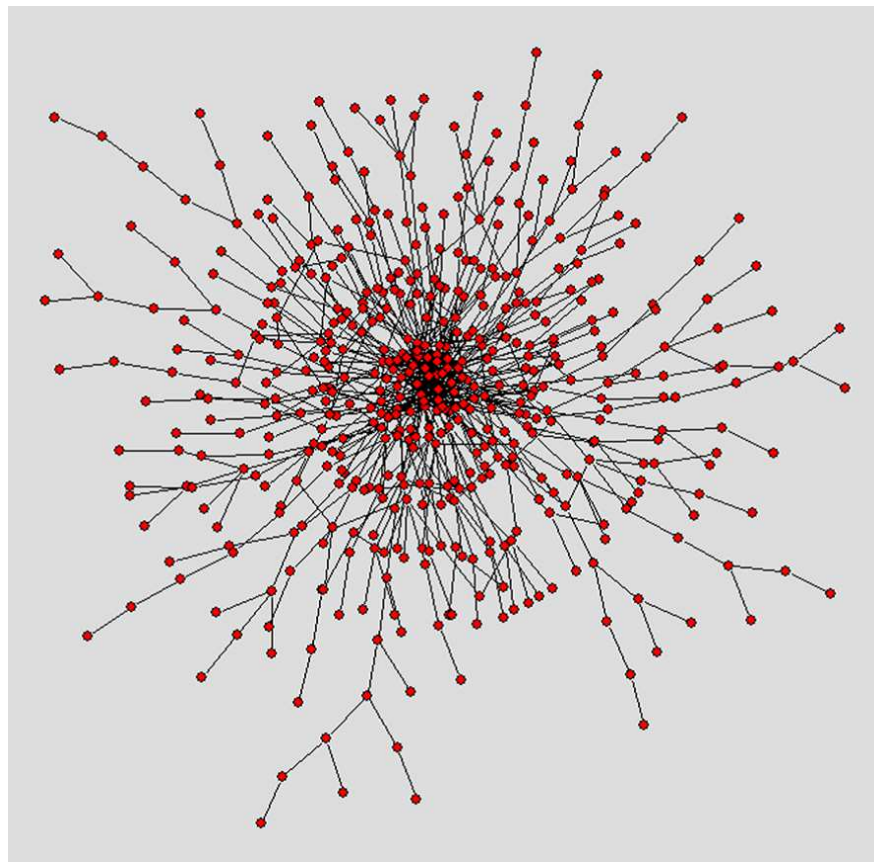


Fig. 8.4: 情報伝達，伝播拡散の最大化による最適ネットワーク (500node)

## 8.3 最適ネットワークの特性解析

ここでは評価関数の式 (8.3) により，隣接行列の最大固有値  $\lambda_n(A)$  を最大化した情報伝達，伝播拡散の優れた最適ネットワークの特性解析を行っていく．

### 8.3.1 情報伝達，伝播拡散の最適化ネットワークの次数分布

進化生成した最適なネットワークの次数分布を，Fig. 8.5 に示す．

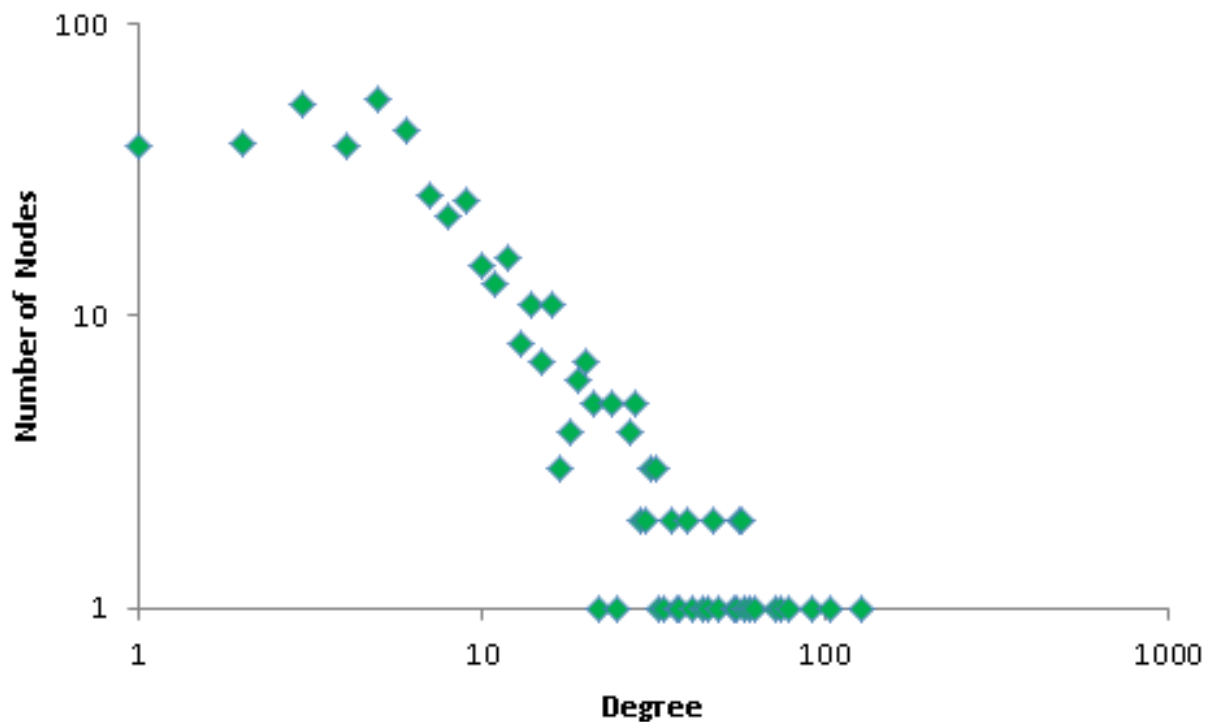


Fig. 8.5: 最適ネットワークの次数分布

Fig. 8.5 と Fig. 2.8 を比較しつつ考えると，スケールフリーネットワークには少数で存在するハブノード相当の高次数のノードが最適ネットワークには多数存在している．これはコア構造を示す高次数の多数のノードが存在する特性が現れていると考えられる．またそれら的高次数のノードが段階的に形成されているだけでなく，ランダムネットワークのポアソン分布に至るまで，広く階層的に次数が分布している．ネットワークの中心から整った階層構造が出来はじめ，中心にいくほどリンク密度が高いコア構造と階層性を併せ持つネットワーク構造であることが次数分布より分かる．

### 8.3.2 情報伝達，伝播拡散の最適化ネットワークの固有値特性による解析

進化生成した最適ネットワークの隣接行列の固有値特性により従来ネットワークモデルと比較して解析していく．Fig. 8.6 に従来ネットワークモデルの隣接行列の固有値推移を比較したものを示す．

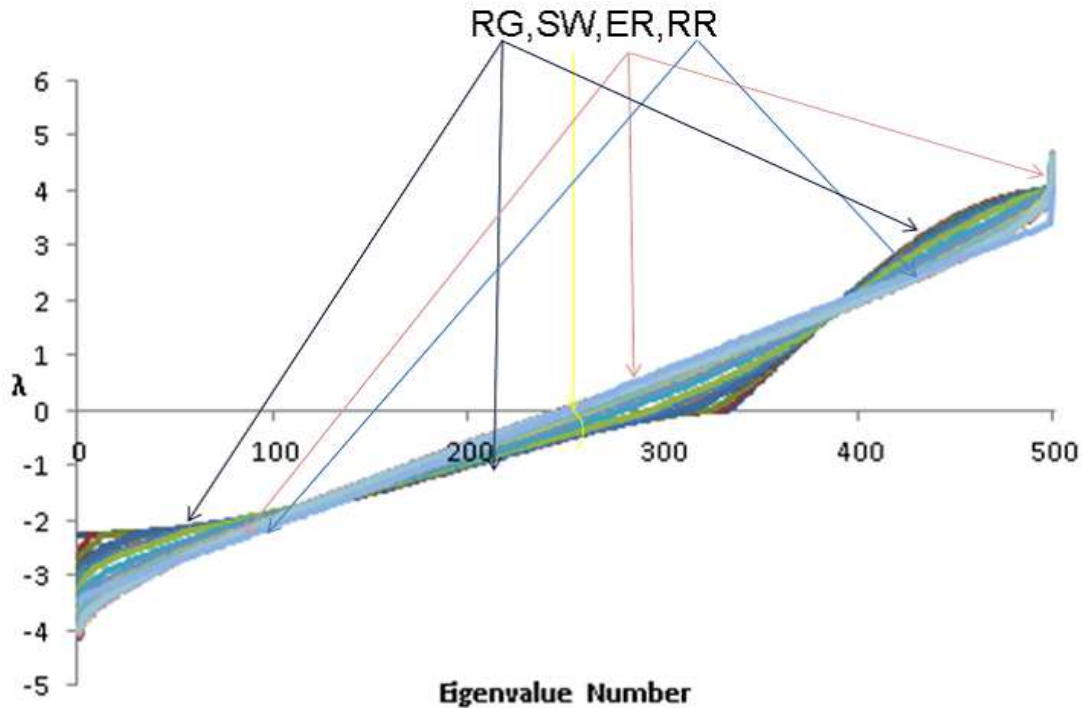


Fig. 8.6: 従来ネットワークモデルと隣接行列の固有値推移

また，従来ネットワークモデルの中で，情報伝達，伝播拡散に優れたネットワークモデルであるスケールフリーネットワークによる隣接行列の全固有値推移を Fig. 8.7 に示す．

Fig. 8.7 から隣接行列におけるスケールフリーネットワークの固有値推移特性が分かる．スケールフリーネットワークは，少数のリンク数しかない多数のノードと，多数のリンクをもつハブとしての性質のあるノードが一部存在することから，最大固有値が大きくなる特性がある．従来ネットワークモデルの中で隣接行列の最大固有値は最も高い値を示している．

また，スケールフリーネットワークは，レギュラー，スモールワールド，ランダム，ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って，中間の固有値が一定値の特性があり，隣接行列においては，その値が0となっている．そして隣接行列の特性として中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性をもっている．このようなことから，スケールフリーネットワークは，従来ネットワークモデルの中で，情報伝達，伝播拡散に優れた隣接行列の最大固有値の大きさと固有値推移特性を包含していることが分かる．

Fig. 8.8 に進化生成した最適ネットワークの隣接行列の固有値推移について従来ネットワークモデルと比較したものを示す．Fig. 8.8 より，最適ネットワークは，隣接行列としての固



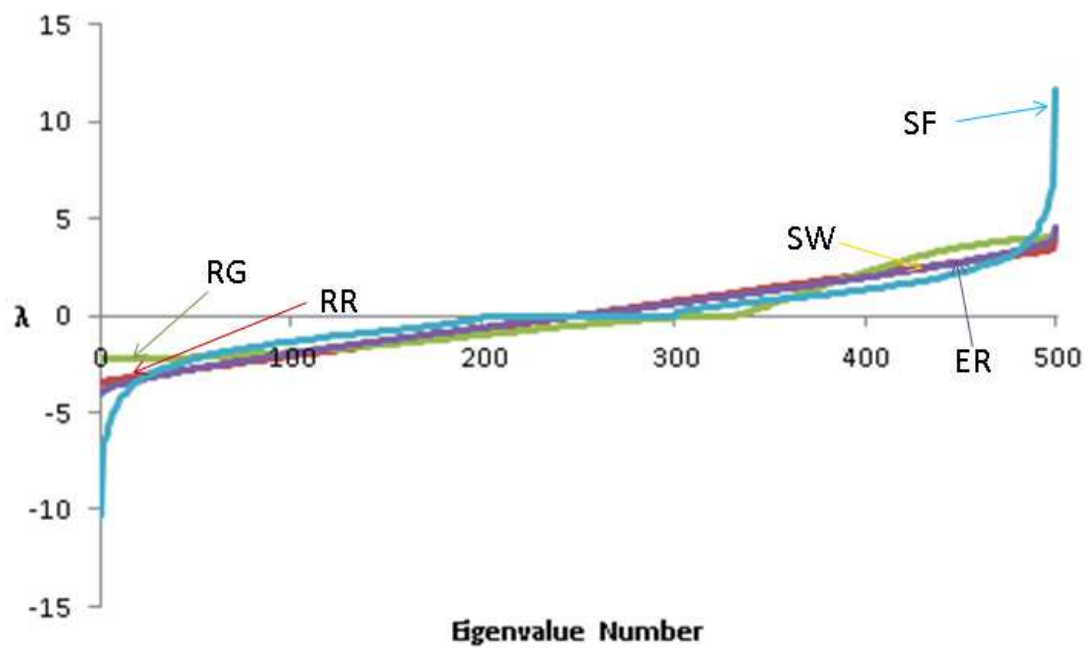


Fig. 8.7: 従来ネットワークモデルとスケールフリーネットワークの隣接行列の固有値推移

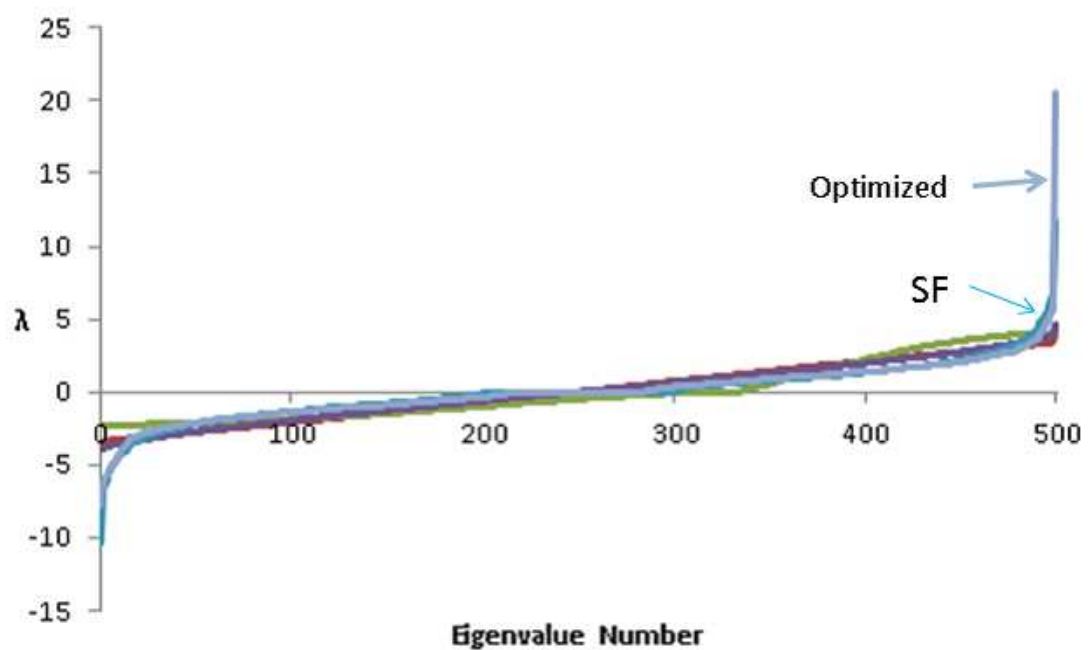


Fig. 8.8: 最適ネットワークと従来ネットワークモデルの隣接行列の固有値推移

有値推移が、従来ネットワークモデルとは合致しないものとなっており、最大固有値は非常に高い値を示している。従来ネットワークモデルの中で隣接行列の最大固有値が最も高いスケールフリーネットワークよりもさらに高い値を示している。比較する上での平均次数は、従来ネットワークモデルと同等の値で比較しているため、ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている。

そしてスケールフリーネットワークにおいて存在する、中間の固有値が一定値0の特性もあるが、スケールフリーネットワークほど一定値の幅が広くなく、他のレギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークの固有値推移にスケールフリーネットワークよりも近づいた固有値推移特性をもっている。そして最大固有値に近い固有値では高い値を示し、最大固有値はスケールフリーネットワークよりも高い値を示している。

そして情報伝達、伝播拡散に関わる重要指標である隣接行列の最大固有値 $\lambda_n(A)$ について、Fig. 8.9に最適ネットワークと従来ネットワークモデルを比較したものを示す。

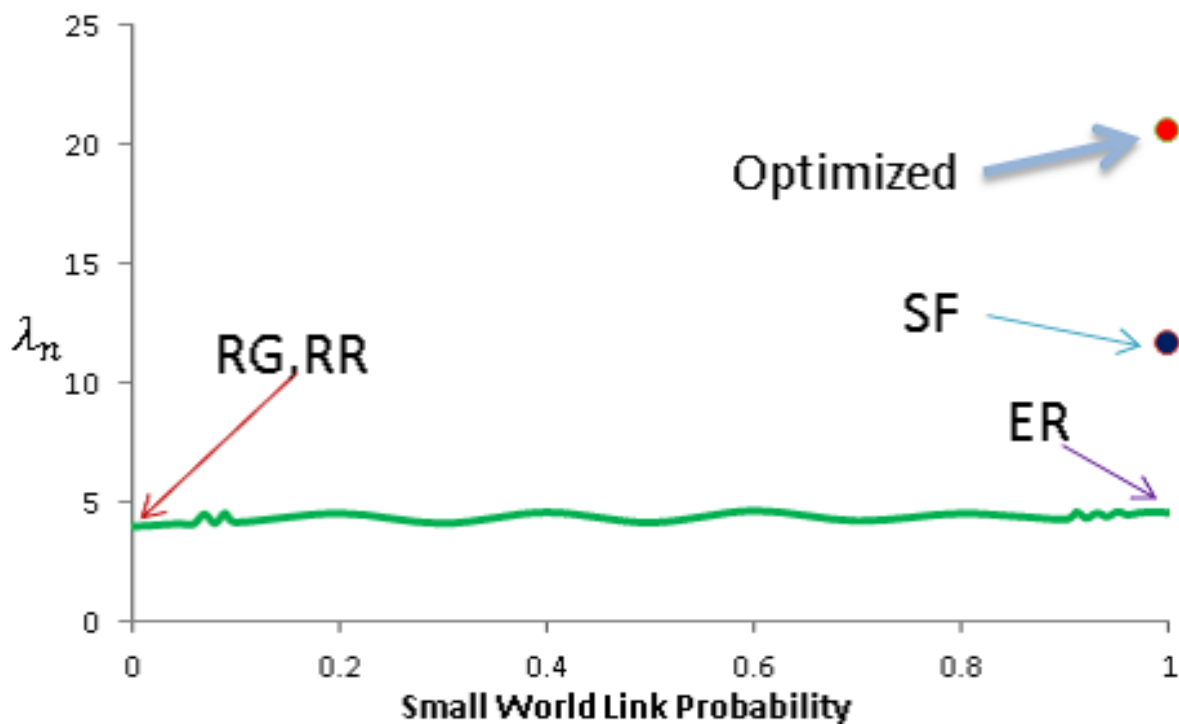


Fig. 8.9: 従来ネットワークモデルと最適ネットワークによる隣接行列の最大固有値の比較

Fig. 8.9より、従来ネットワークの中ではレギュラーネットワーク及びランダムレギュラーネットワークが最大固有値が低く、情報伝達、伝播拡散に適さないネットワーク構造となっている。スモールワールドネットワークは、ランダムリワイヤリングのリンク確率 $p$ が高くなるに従って、最大固有値が微弱高くなっていき、レギュラーネットワークよりも情報伝達、伝播拡散に微弱上回る特性が現れている。従来モデルで最も最大固有値が高いのはスケールフリーネットワークであり、情報伝達、伝播拡散に最も優れたモデルである。

そして、進化生成した最適ネットワークは、従来ネットワークモデルの中で隣接行列の最



大固有値が最も高いスケールフリーネットワークよりもさらに高い値を示している．このことから，隣接行列の最大固有値による最適ネットワークは，従来モデルで最も高いスケールフリーネットワークよりも情報伝達，伝播拡散において，さらに優れたネットワーク構造となっている．

### 8.3.3 隣接行列の固有値分布によるスペクトル解析

ここでは隣接行列の固有値特性に基づいたスペクトル解析からネットワークの特性をみていく．各種ネットワークの固有値分布を以下に示していく．

まずは従来ネットワークモデルであるレギュラーネットワーク，スモールワールドネットワーク (代表として  $p=0.2$ )，ランダムネットワーク，ランダムレギュラーネットワークの隣接行列の固有値分布をそれぞれ Fig. 8.10, Fig. 8.11, Fig. 8.12, Fig. 8.13 に示す．

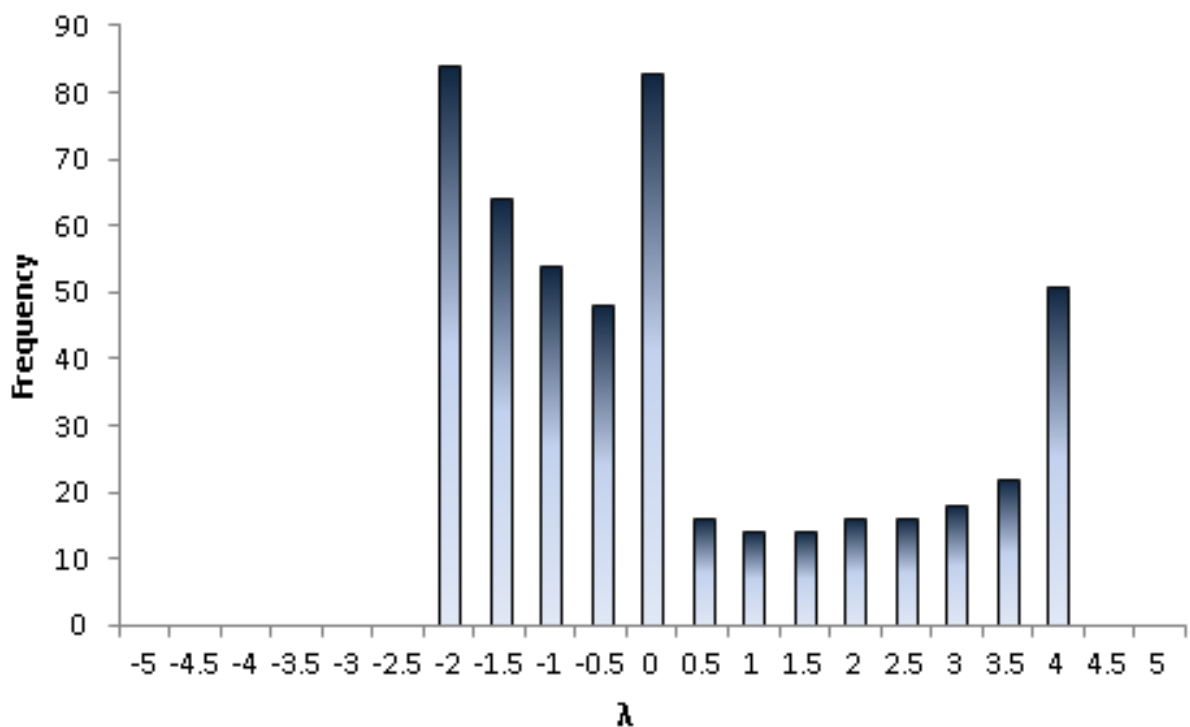


Fig. 8.10: レギュラーネットワークの隣接行列の固有値分布

固有値分布からネットワークの固有値推移の意味がみてとれる．レギュラーネットワークは最大固有値が低く，推移も急な高まりと変動があり，固有値分布が谷間のように低い頻度とバラツキのある特性となっている．スモールワールドネットワーク ( $p=0.2$ ) はランダムネットワークとレギュラーネットワークの中間的な固有値推移を示し，固有値分布もレギュラーネットワークで存在した谷間のように低い頻度の固有値が増え，バラツキが少なくなる傾向がある．ランダムネットワークの固有値分布は，スモールワールドネットワーク ( $p=0.2$ ) よ

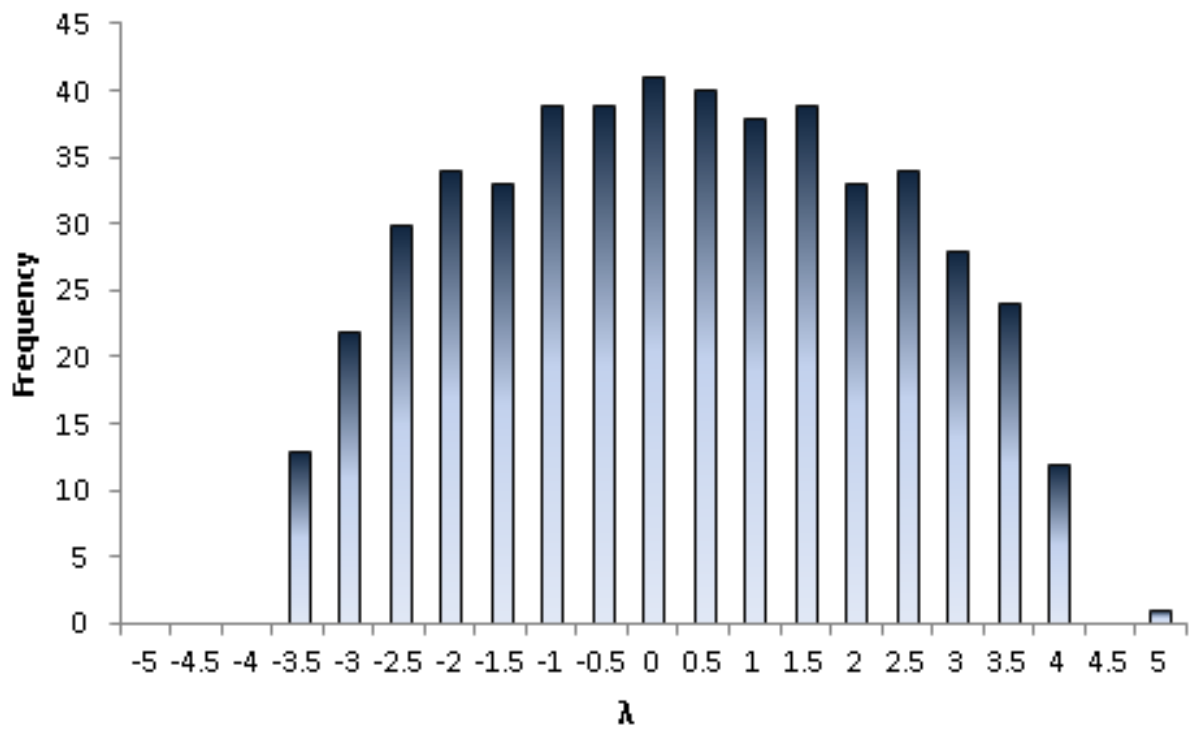


Fig. 8.11: スモールワールドネットワーク ( $p = 0.2$ ) の隣接行列の固有値分布

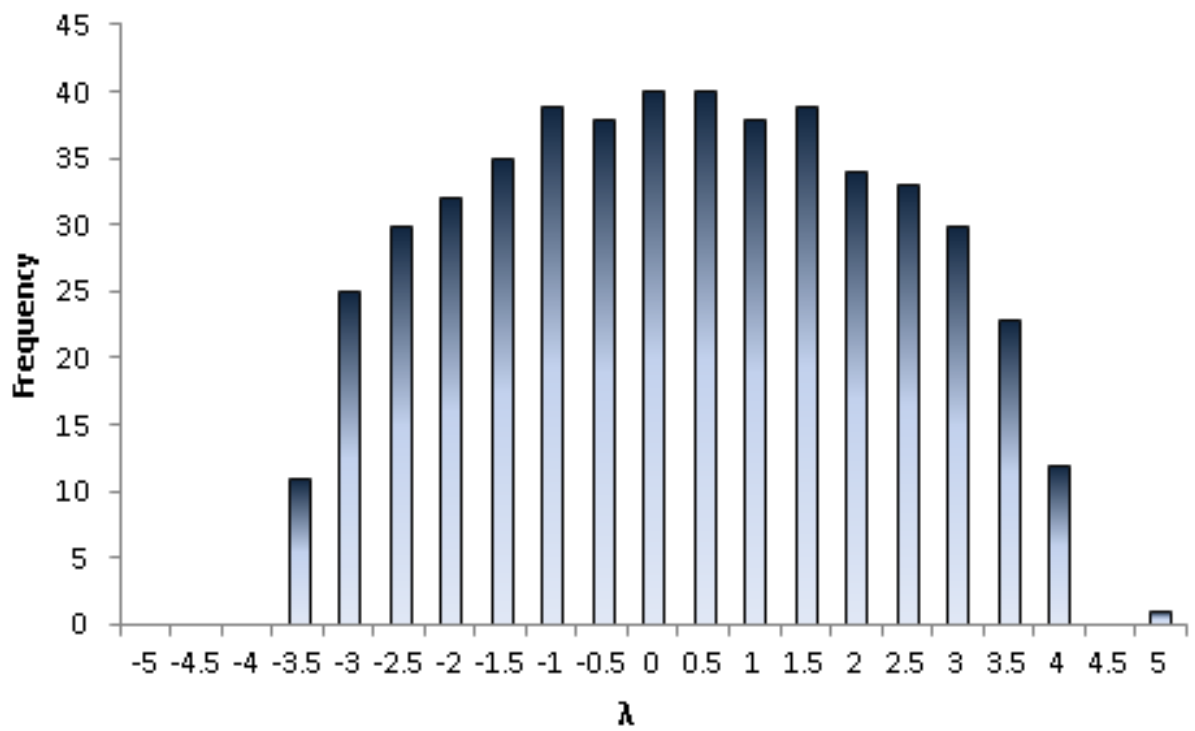


Fig. 8.12: ランダムネットワークの隣接行列の固有値分布

りも全体的に山型形状に近い頻度の特性となっている。ランダムレギュラーネットワークは固有値分布は数の差が少なく、均質な特性が現れている。そのため固有値推移が直線的となる特性が現れている。

隣接行列の最大固有値  $\lambda_n(A)$  に関して、レギュラーネットワーク、スモールワールドネットワーク ( $p=0.2$ )、ランダムネットワーク、ランダムレギュラーネットワークにおいては、どのネットワークも高くなく、情報伝達、伝播拡散には優れたネットワーク構造にはなっていない。

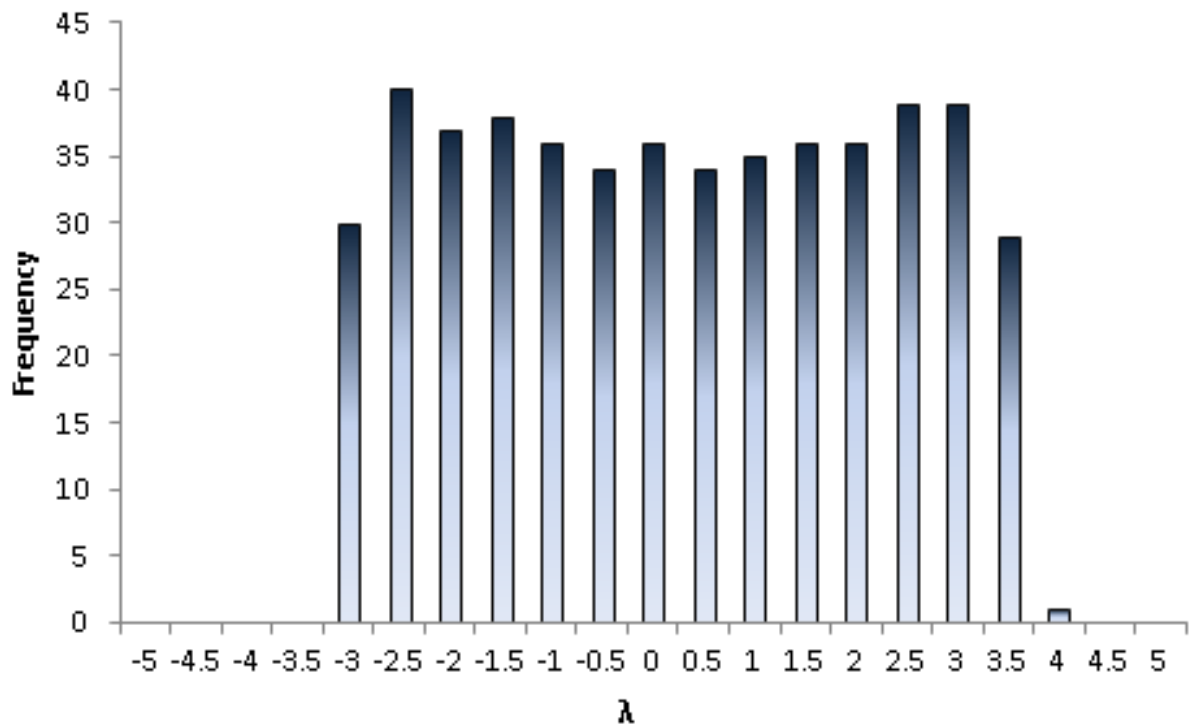


Fig. 8.13: ランダムレギュラーネットワークの隣接行列の固有値分布

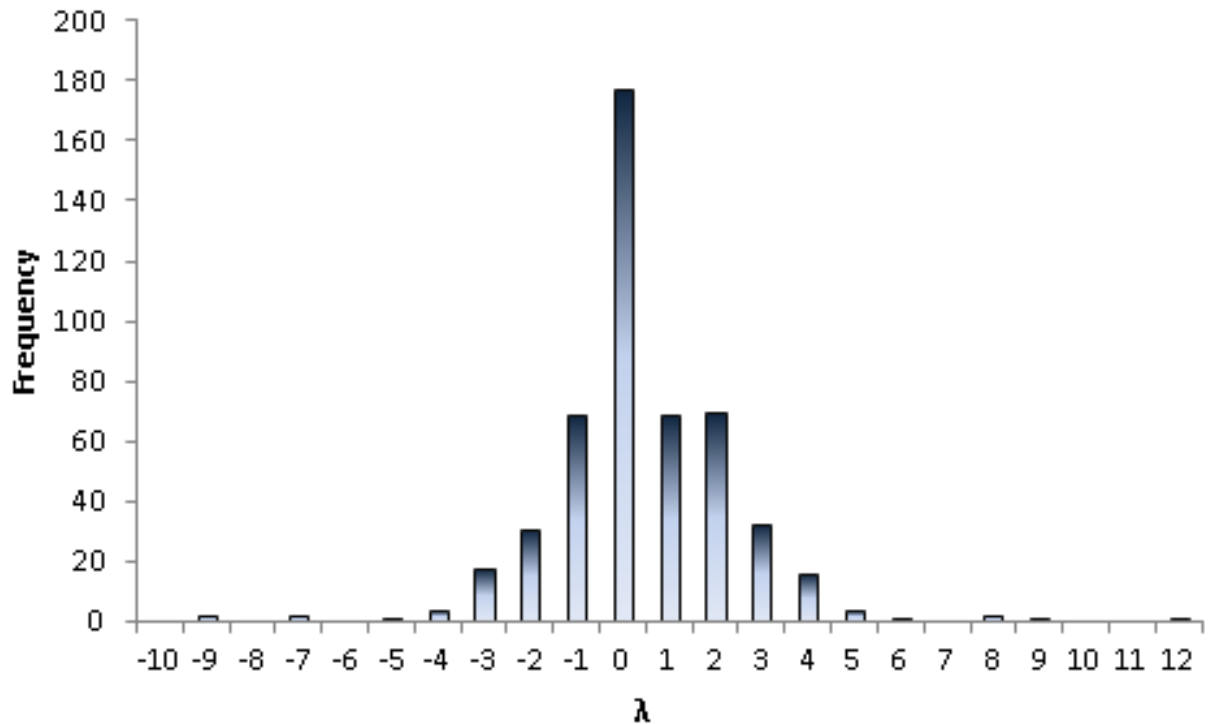


Fig. 8.14: スケールフリーネットワークの隣接行列の固有値分布

スケールフリーネットワークの隣接行列の固有値分布をFig. 8.14に示す。スケールフリーネットワークは、Fig. 8.7において解析したように、レギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークのようなモデルと違って、中間の固有値が一定値の特性があり、隣接行列においては、その値が0となっている。そして隣接行列の特性として中間の一定な固有値を中心として対称的な固有値推移特性をもっている。そのため、固有値分布においても中間の一定な固有値が最も頻度が高く、切り立った山状の特性となっている。少数のリンク数しかない多数のノードと、多数のリンクをもつハブとしての性質のあるノードが一部存在するスケールフリーネットワークとしての次数分布がべき乗則となる特性が現れている。そして隣接行列の最大固有値 $\lambda_n(A)$ に関して、固有値分布の中でその高さが分かり、他の従来ネットワークモデルよりも高く、情報伝達、伝播拡散に優れたネットワーク構造となっている。

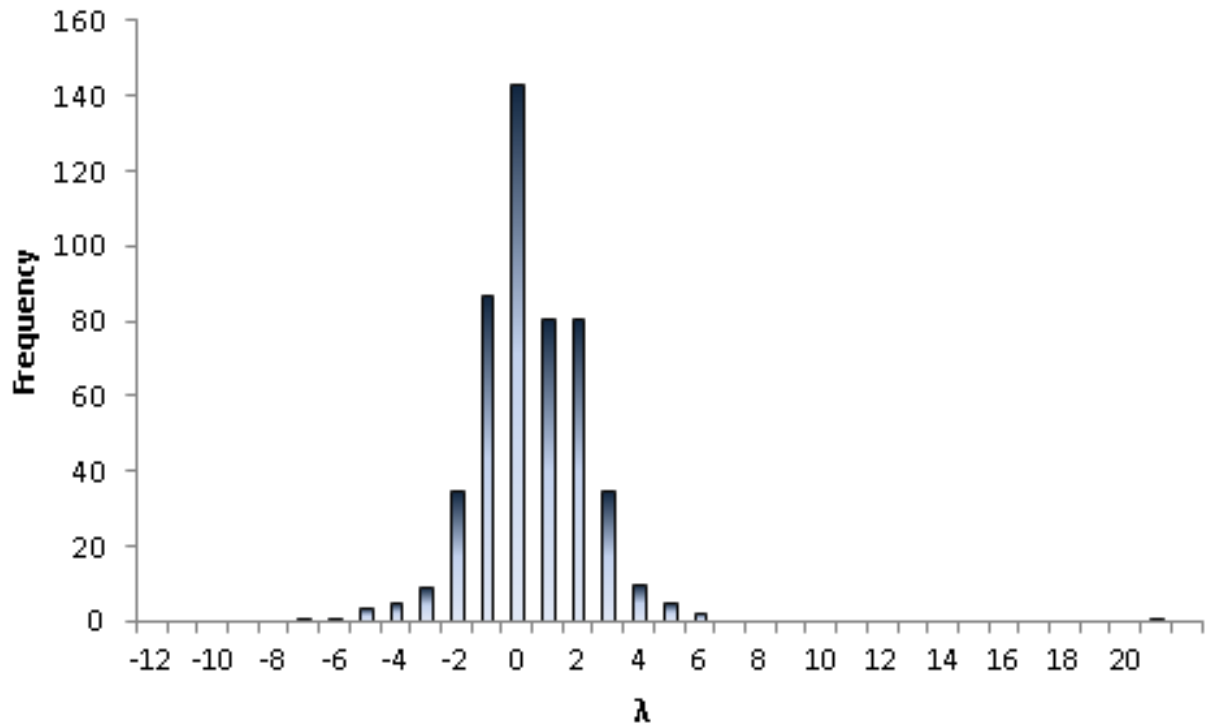


Fig. 8.15: 最適ネットワークの隣接行列の固有値分布

最適ネットワークの隣接行列の固有値分布をFig. 8.15に示す. 最適ネットワークは, 隣接行列の固有値分布から, 従来ネットワークモデルとは異なり, 最大固有値は非常に高い値を示していることが分かる.

従来ネットワークモデルの中で隣接行列の最大固有値が最も高いスケールフリーネットワークよりもさらに高い値を示している. そしてスケールフリーネットワークにおいても存在する, 中間の固有値が一定値0の特性から, 中間の一定な固有値頻度が高く, 切り立った山状の特性をもつ. しかしスケールフリーネットワークほど一定値の幅が広くないため, スケールフリーネットワークほど高い切り立った山状の特性ではない. 他のレギュラー, スモールワールド, ランダム, ランダムレギュラーネットワークの固有値分布にスケールフリーネットワークよりも近い値を一部多く包含する固有値分布特性をもっている.

そして隣接行列の最大固有値 $\lambda_n(A)$ に関して, 従来モデルで最も高いスケールフリーネットワークよりも非常に高い値を示し, 情報伝達, 伝播拡散において, さらに優れたネットワーク構造となっている.

### 8.3.4 隣接行列の固有値による木構造の最適ネットワーク

ここでは、式 (8.2) によって、情報伝達、伝播拡散に適さないものとして進化生成された最適ネットワークの特性を示す。隣接行列の固有値によるスペクトル解析から木構造ネットワークの特性を述べる。まず Fig. 8.6 で示した従来ネットワークモデルと固有値推移を比較したものを Fig. 8.16 に示す。

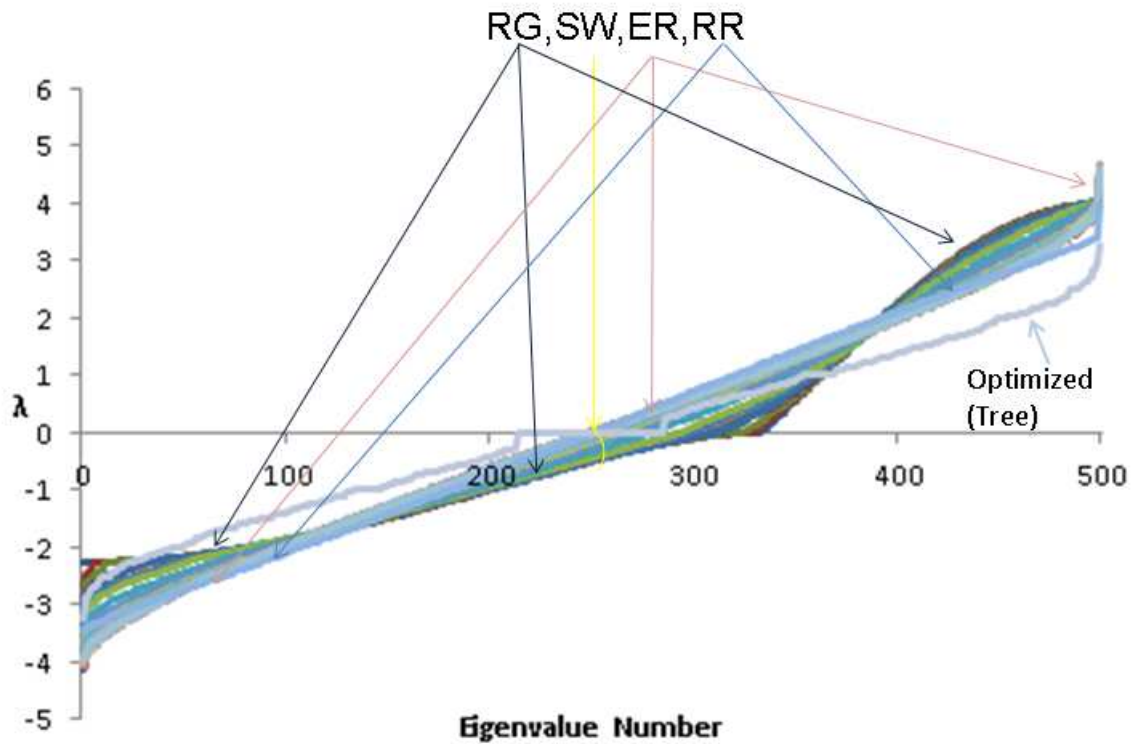


Fig. 8.16: 木構造の最適ネットワークと従来ネットワークモデルの隣接行列の固有値推移

これより、木構造の最適ネットワークの固有値推移はスケールフリーネットワークにおいて存在する、中間の固有値が一定値0で、そこを中心として対称的な特性もあるが、スケールフリーネットワークほど一定値の幅が広くなく、他のレギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラー、スケールフリーネットワークの固有値推移から離れた固有値推移特性をもっている。

そして Fig. 8.17 には、木構造の最適ネットワークの固有値分布を示す。

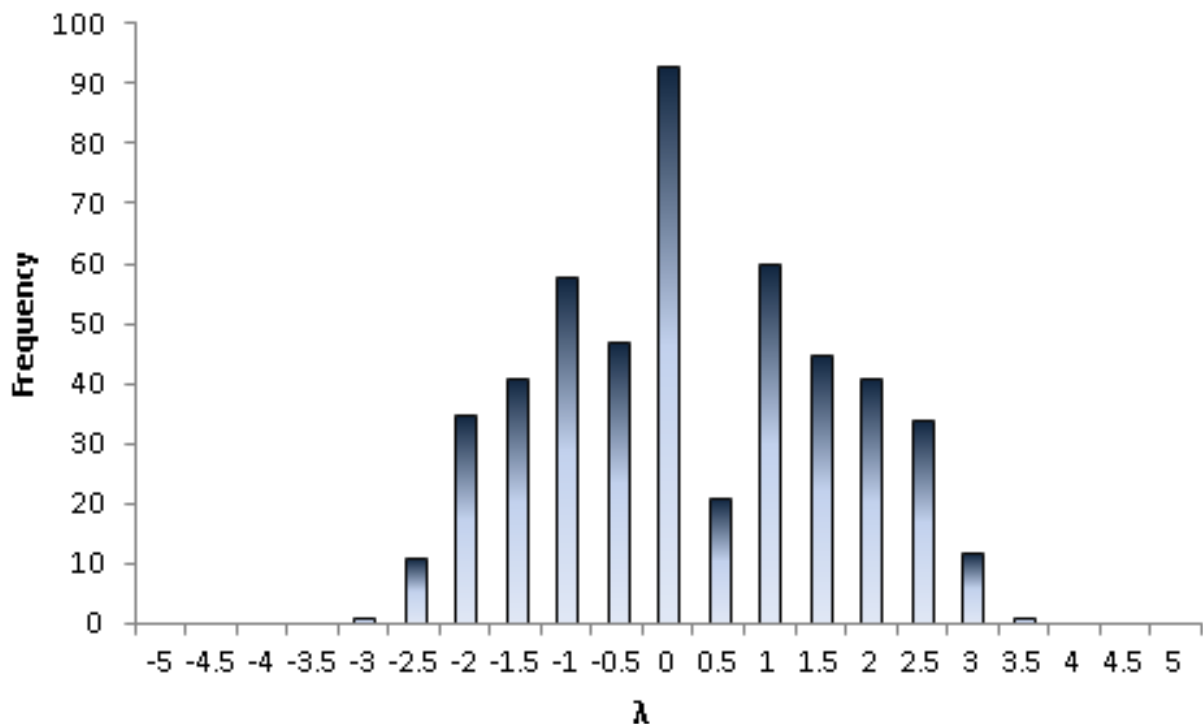


Fig. 8.17: 木構造の最適ネットワークの固有値分布

Fig. 8.17 より固有値は分布の幅は小さく、最大固有値は非常に低い値を示している。情報伝達、伝播拡散の閾値は低くなく、拡散の起こりにくいネットワークが進化生成されていることが分かる。

このようなスペクトル解析から、木構造の最適ネットワーク特性を読み取ることができ、情報伝達、伝播拡散を行いにくいネットワーク構造として最適化されていることが分かる。

Table 8.1 に情報伝達、伝播拡散に適さない木構造の最適ネットワークの固有値特性と情報伝達、伝播拡散の閾値についてまとめたものを示す。

Table 8.1: 木構造ネットワークの行列の固有値特性と情報伝達、伝播拡散の閾値

構造	特性		
	直径	最大固有値	情報伝達、伝播拡散の閾値
tree	71	3.25	0.30769

隣接行列の固有値特性としての最大固有値が非常に低く、情報伝達、伝播拡散の起こりにくいネットワーク構造として進化生成されている。このようなネットワークは、情報伝達、伝播拡散等を抑えることを目的としたネットワーク設計の指針となる様々な分野の応用へと繋がるものがあると考えられる。

## 8.4 最適ネットワークと従来ネットワークモデルの情報伝達, 伝播拡散特性

これまで生成設計した最適ネットワークの隣接行列の最大固有値を従来ネットワークモデルと比較, 解析を行って, ネットワークの固有値特性から最適ネットワークがより優れた特性をもつことを示した. ここでは, 進化手法により生成された最適ネットワークの情報伝達, 伝播拡散の比較を行う.

式 (7.4) において述べた SIR モデルにより, 最適ネットワークと従来ネットワークモデルのシミュレーションを行った結果を Fig. 8.18 に示す. 平均次数は同等の値で比較しているため, ネットワークの特性を比較する妥当性が保証されている. 縦軸は, 情報伝達, 伝播拡散したノード数の割合を意味する. その割合は, それぞれのネットワークにおいて, 情報伝達, 伝播拡散したノード数を, 最適ネットワーク上で情報伝達, 伝播拡散しきった総ノード数で割ったものである. 横軸は, 式 (7.13) で述べた情報伝達, 伝播拡散の閾値を意味する.

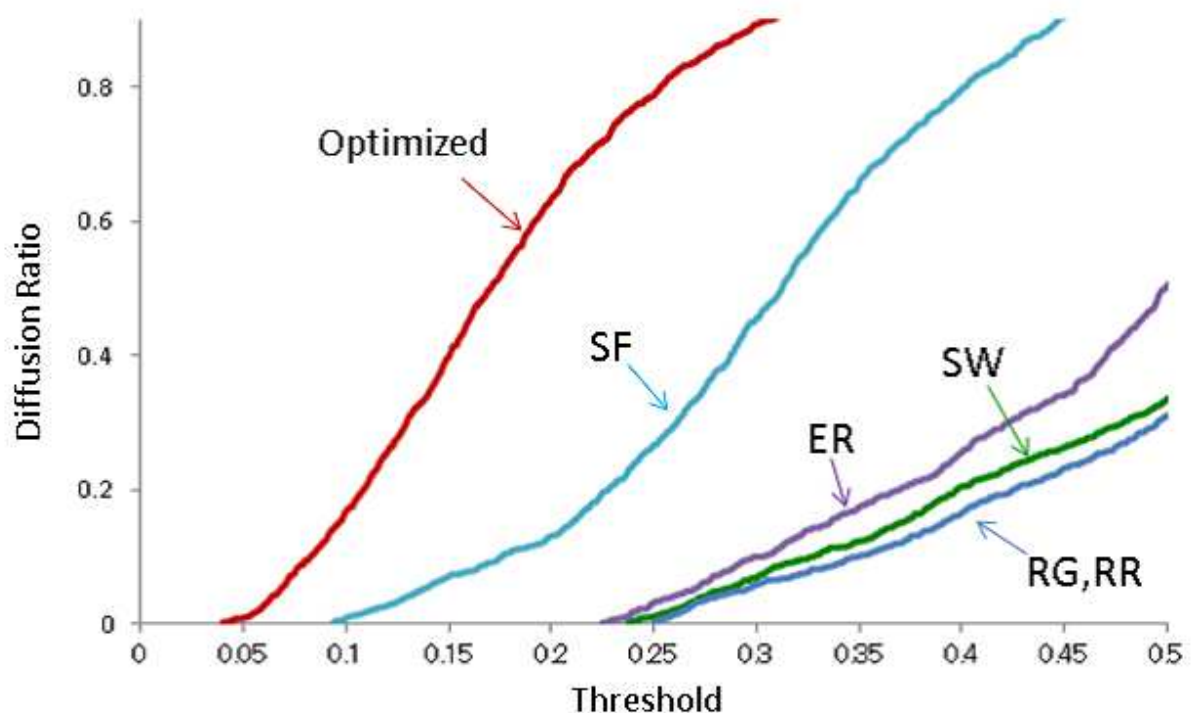


Fig. 8.18: 最適ネットワークと従来ネットワークモデルの情報伝達, 伝播拡散

Fig. 8.18 より, レギュラー及びランダムレギュラーネットワークにおいて, 情報伝達, 伝播拡散の始まりが最も遅い. スモールワールドネットワーク ( $p=0.2$ ), ランダムネットワークが微弱レギュラー及びランダムレギュラーネットワークよりも情報伝達, 伝播拡散の始まりが早い.



そしてスケールフリーネットワークは、従来モデルで情報伝達、伝播拡散の始まりが最も早い。スケールフリーネットワークにおける一部の高次数であるハブノードの存在から、ノードの次数分布がべき分布に従い、隣接行列の最大固有値が従来ネットワークモデルの中で最も高く、情報伝達、伝播拡散において優れた特性が現れている。

そして進化手法による最適ネットワークは、スケールフリーネットワークより情報伝達、伝播拡散の始まりがさらに早く、急速的な情報伝達、伝播拡散が起こっている。

これまで検証してきたように隣接行列の固有値特性に基づいて、各種ネットワークの特性をみてきた結果、レギュラー及びランダムレギュラー、スモールワールド、ランダム、スケールフリーネットワークの順で隣接行列の最大固有値が高くなっており、進化手法最適ネットワークは、それらよりもさらに高い最大固有値をもつことを示した。そして実際の情報伝達、伝播拡散もそれに対応して、進化手法最適ネットワークが最も優れた特性をもっている。

これまで述べてきた解析結果を踏まえると、本研究における隣接行列の最大固有値に基づく最適化により生成されたネットワークは、スケールフリー、ランダムネットワーク、スモールワールド等の従来研究されてきたネットワークの型で一概に捉えられない特性をもっている。そしてこれまで盛んに研究されてきた複雑ネットワークの多くの特性を包括的、総合的に取り込んでいるものであり、多くの複雑ネットワークの総合的な特性が進化表出していると考えられる。そして階層性やコア構造による中心密度性といったフラクタル性、自己相似性、社会的な組織特性とも関連した特性を備えており、このネットワークは、組織構造、情報通信ネットワーク体制等、多様なものと関連した設計指針の一つともなりうるものであると考えられる。

本研究で進化手法により得られた最適ネットワークは、情報伝達、伝播拡散において、従来有効モデルであるスケールフリーネットワークよりも優れた、最適という特性に相応しい優れた特性をもっている。情報伝達、伝播拡散が関係する多様な問題が現実世界に存在することを考えると、その最適なネットワーク設計の意義は、大きいものであると考えられる。従来研究において、情報伝達、伝播拡散に対して、どのようなネットワーク構造が優れているかという世界中で多くの研究がなされているテーマに対する有効な手法として、本研究の意義を示しうるものである。

以下にこれまで解析してきた各ネットワークの特性及び情報伝達，伝播拡散の閾値を比較してまとめたものをTable 8.2を示す．平均次数は同等の値で比較しているため，ネットワークの固有値特性を比較する妥当性が保証されている．

Table 8.2: 各ネットワークの行列の固有値特性と情報伝達，伝播拡散の閾値

特性 構造	直径	最大固有値	情報伝達，伝播拡散の閾値
Regular	125	4	0.25000
Small World( $p = 0.2$ )	11	4.18	0.23923
Random	8	4.57	0.21882
Random Regular	8	4	0.25000
Scale Free	6	11.68	0.08562
Optimized	13	20.53	0.04871

Table 8.2 より，レギュラー及びランダムレギュラー，スモールワールド，ランダム，スケールフリーネットワーク，そして進化手法による最適ネットワークの順で隣接行列の最大固有値が高くなり，情報伝達，伝播拡散の閾値も低く，感染爆発，情報伝達や伝播拡散の起こりやすいネットワーク構造となっていることが分かる．

進化手法による最適ネットワークが，従来有効ネットワークモデルよりも隣接行列の最大固有値とそれに対応した情報伝達，伝播拡散の閾値において優れており，これまでの従来研究で知られているネットワークモデルよりも有効な提案手法であるといえる．これまで世界中で様々な視点や手法をもって多くの研究がなされている情報伝達，伝播拡散に関するネットワークの研究を踏まえると，情報通信ネットワークの分野，生命体の構造，伝播拡散に関する自然現象，社会特性や戦争，流通や経済普及，疫学等に至るまで様々なネットワーク構造に関係するものである．情報伝達，伝播拡散の優れた最適なネットワークとして，有意義且つ効果的なネットワークモデルであることがいえる．多様な諸問題と関連する情報伝達，伝播拡散に対する最適なネットワーク設計の構造モデルの一つとして，本研究における提案ネットワークの重要性と有効性を示しうるものである．

## 8.5 進化手法による情報伝達，伝播拡散の最適ネットワークの生成設計のまとめ

本研究では，進化的アルゴリズムにより，リンク密度とネットワークの隣接行列の固有値に基づいて，最適なネットワークを提案した．進化手法によるネットワークの最適化が，情報伝達，伝播拡散に対して従来優れたネットワークモデルとされるスケールフリーネットワークよりも優れたものを生成し，より隣接行列の最大固有値が高く，情報伝達，伝播拡散に優れたネットワークとなることを示した．そして実際の情報伝達，伝播拡散もそれに対応して，進化手法最適ネットワークが最も優れた特性をもっていることを示した．そして従来ネットワークモデルを含めた各種ネットワークにおける固有値の推移や分布から，これらの特性の解析を行い，従来ネットワークモデル及び最適ネットワーク構造の意味について深く探求していった．

本研究における隣接行列の最大固有値に基づく最適化により生成されたネットワークは，スケールフリー，ランダムネットワーク，スモールワールド等の従来研究されてきたネットワークの型で一概に捉えられない特性をもっている．そしてこれまで盛んに研究されてきた複雑ネットワークの多くの特性を包括的，総合的に取り込んでいるものであり，階層性やコア構造による中心密度性といった自己相似性，社会的な組織特性とも関連した特性を備えており，組織構造、情報通信ネットワーク体制等，多様なものと関連した設計指針の一つともなりうるものであると考えられる．情報伝達，伝播拡散に対して，どのようなネットワーク構造が優れているかというテーマに対する有効な手法として，本研究の意義を示しうるものである．

今後の課題としては，本研究における最適ネットワーク特性やそれぞれのネットワークにおける特性の解析をより深めていき，これらのネットワーク構造の意味をより探求していくと共に，情報伝達，伝播拡散以外の他の問題特性における最適ネットワークの生成設計を行っていくことが考えられる．

## 第9章 おわりに

本研究では、進化手法による最適ネットワークの生成設計を行い、従来ネットワークモデルよりも優れた構造モデルを提案した。そしてこれらのネットワークの特性解析及び考察を行った。本章では、本研究から得られた結論をまとめて述べる。次にこれらの意義を説明し、最後に今後の課題について述べる。

### 9.1 本研究から得られた結論

#### 9.1.1 コンセンサス，同期問題における最適ネットワークの生成設計

進化手法による最適ネットワークの生成設計では、コンセンサス，同期問題を考え、進化的アルゴリズムにより、リンク密度とネットワークのラプラシアン行列等の固有値に基づいて、最適なネットワークを提案した。進化手法によるネットワークの最適化が従来コンセンサス，同期問題に対して優れたネットワークモデルとされるスモールワールドネットワークやランダムレギュラーネットワークよりも優れたものを生成し、より代数的連結性が高く、収束性に優れたネットワークとなり、**condition number**による最適ネットワークが最も収束性に優れた特性をもつことを示した。そして固有値の推移や分布から、これらの特性の解析を行い、これらのネットワーク構造の意味について深く探求していった。また、コンセンサス，同期問題において適さない最適ネットワークの生成設計も提案し、その構造特性解析と意義についても示した。

#### 9.1.2 リンクの重みを考慮した最適ネットワークの生成設計

リンク密度と推移確率行列，正規化ラプラシアン行列の固有値特性に基づいて、リンクの重みを考慮したネットワークを考え、進化手法により最適ネットワークを生成設計した。その固有値特性による解析から、これらの推移確率行列，正規化ラプラシアン行列における進化手法により生成設計された最適ネットワークも従来有効ネットワークモデルよりも優れた特性をもつことを示した。それらのネットワークの構造特性を解析すると共に、重み付きにおけるネットワークにおいて、コンセンサス，同期問題において適さない最適ネットワークの生成設計も行い、その構造特性と意義についても探求を行った。様々な諸問題と関連する

コンセンサス，同期問題に対する最適なネットワーク設計の構造の一つとして，提案ネットワークの意義と有効性を示した．

### 9.1.3 情報伝達，伝播拡散の最適ネットワークの生成設計

情報伝達，伝播拡散の最適ネットワークの生成設計においては，進化的アルゴリズムにより，リンク密度とネットワークの隣接行列の固有値に基づいて，最適なネットワークを提案した．進化手法によるネットワークの最適化が，情報伝達，伝播拡散に対して従来優れたネットワークモデルとされるスケールフリーネットワークよりも優れたものを生成し，より隣接行列の最大固有値が高く，情報伝達，伝播拡散に優れたネットワークとなることを示した．そして実際の情報伝達，伝播拡散もそれに対応して，進化手法最適ネットワークが最も優れた特性をもっていることを示した．また，情報伝達，伝播拡散において適さない最適ネットワークの生成設計も行い，その構造特性の解析を行った．そして従来ネットワークモデルを含めた各種ネットワークにおける固有値の推移や分布から，これらの特性の解析を行い，従来ネットワークモデル及び最適ネットワーク構造の意味について深く探求していった．隣接行列の最大固有値に基づく最適化により生成されたネットワークは，階層性やコア構造による中心密度性といった自己相似性，社会的な組織特性とも関連した特性を備えており，多様なものと関連した設計指針の一つともなりうるものであると考えられる．情報伝達，伝播拡散に対して，どのようなネットワーク構造が優れているかというテーマに対する有効な手法として，提案ネットワークの意義を示した．

## 9.2 本研究の工学的意義

本研究で提案したネットワークは，今後，益々役割が大きくなると考えられる効率的なセンサネットワーク構築や多数のコンピュータネットワーク構築，多数のエージェントによるロボット，センサーや粒子等を制御するための問題としても工学的に様々な有効性あるものであり，監視，探索，移動複数ロボットを制御するための分散制御やエージェントの協調制御の問題としても重要な関連があるものである．また，自然現象，生命体の構造を考察することや効率的な情報通信ネットワークの構築，疫学，経済，社会特性の広範な分野に亘って応用可能性のあるモデルでもあることから，本研究の意義は，将来的にも繋がる大きなものであると考えられる．

具体的には，これまでの従来研究を踏まえて，以下の分野において応用が可能である．

- ネットワーク構築への応用

情報通信ネットワークの分野<sup>104,105)</sup> や今後携帯用情報手段において益々役割が大きくなると考えられる効率的なセンサネットワーク構築<sup>59-61)</sup>，リモートセンシング<sup>62)</sup> や

多数のコンピュータネットワーク構築においても、より情報伝送を図る上での効率的なネットワーク設計を行う上でも重要な役割を果たすものと考えられる。

- 制御工学への応用

多数のエージェントによるロボット、センサーや粒子等を制御する<sup>61,64,65)</sup> ための問題としても工学的に様々な有効性あるものとして用いられており、監視、探索、移動複数ロボットを制御するための分散制御や協調制御<sup>5-7,66)</sup> の問題としても効果的に応用可能である。

- 物理的応用

同期現象<sup>29)</sup> だけでなく、振動子パルス<sup>47-49)</sup> の同期問題<sup>50-52)</sup> や分子間の相互作用におけるメカニズムを捉えるための物理学的視点<sup>53,54)</sup> においても重要なアプローチ視点となると考えられる。

- 情報共有形体への応用

多数の構成要素が分散して保有する情報を、全体で共有する上でどのような形体をとるべきかを考慮する問題も、多くの分野に共通する課題である。それらは並列分散系の情報散布問題として、Gossip algorithms<sup>55-58)</sup> 等の研究対象として扱われているものもあり、それらに対しても効果的に応用可能である。

- 生命体の構造や自然現象解明への応用

生命体の構造<sup>106,107)</sup>、浸透や自然現象<sup>38,108,109)</sup>、自然界における動物の群れ行動<sup>46)</sup> や生物のホタルの発光<sup>26)</sup> 同期現象、人間の議論における意見の合意や集団行動における同期現象<sup>29)</sup> の問題においても重要な特性があり、生命体の構造や自然現象の解明においても有用である。

- 社会特性への応用

経済流通や繋がり<sup>112-114)</sup>、社会特性や戦争<sup>110,111)</sup>、疫学<sup>9,115,116)</sup> 伝播拡散<sup>111,117,118)</sup> 等の様々な社会特性とも関連し、重要な視点となりうるものと考えられる。

## 9.3 今後の課題

本論文では、進化手法による最適ネットワークの生成設計モデルの提案及びその特性解析を行った。

今後の課題としては、以下の点が考えられる。

### 9.3.1 ネットワークにおける特性の解析と応用

本研究における提案ネットワークや従来ネットワークを含む、それぞれのネットワークにおける特性の解析を続け、これらのネットワーク構造の意味をより捉えていく。それにより広範な分野において、これらのネットワークモデルを効果的に応用していくことが今後の課題として考えられる。

具体的には、9.2 で述べたように、以下の分野において応用が可能である。

- ネットワーク構築への応用
- 制御工学への応用
- 物理的応用
- 情報共有形体への応用
- 生命体の構造や自然現象解明への応用
- 社会特性への応用

### 9.3.2 他の問題特性における最適ネットワークの生成設計

本研究において行ったコンセンサス、同期問題における最適ネットワークの生成設計、リンクの重みを考慮した最適ネットワークの生成設計、情報伝達、伝播拡散の最適ネットワークの生成設計以外の問題特性における最適ネットワークの生成設計を行っていくことも今後の課題として考えられる。

# 謝辞

筑波大学大学院システム情報工学研究科において、多くの方々の御指導と御協力を頂きながら本論文をまとめることができました。

特に多くの御指導、御鞭撻を賜りました筑波大学大学院システム情報工学研究科狩野均教授に心より感謝の念と深く御礼を申し上げます。狩野均教授には仕事の状況等、様々なご配慮をしながら御指導下さり、有益な博士課程生活を送ることができました。また、研究討議を通して思考や識見が広がる機会をもつことができ、有意義な実りある時間を過ごすことができました。大変お世話になりましたことを心より感謝致します。

そして、筑波大学大学院システム情報工学研究科酒井宏教授、大矢晃久教授、亀山啓輔准教授、三末和男准教授には、本論文の審査にあたり、的確な御指摘や貴重な御意見、御助言を頂き、深く感謝致します。また、筑波大学知識システム研究室の皆様、過去お世話になりました生天目章教授、佐藤浩准教授にもこの場を借りて感謝と御礼を申し上げます。

本研究中公私に亘って御支援、御示唆をして下さった方々をはじめ、お世話になった全ての皆様に感謝と御礼を申し上げます。

ありがとうございました。



## 参考文献

- 1) D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, Vol. 393, No. 6684, pp. 440–442, 1998.
- 2) A. L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509–512, October 1999.
- 3) P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, Vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- 4) Reka Albert and Albert L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, No. 1, 2002.
- 5) R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. In *Proceedings of the IEEE*, Vol. 95, pp. 215–233, 2007.
- 6) R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, pp. 1520–1533, 2004.
- 7) W. Ren, R.W. Beard, and E.M. Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *Control Systems, IEEE*, Vol. 27, No. 2, pp. 71–82, 2007.
- 8) A. Ganesh, L. Massoulié, and D. Towsley. The effect of network topology on the spread of epidemics. In *Proceedings IEEE INFOCOM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, Vol. 2, 2005.
- 9) Y. Wang, D. Chakrabarti, C. Wang, and C. Faloutsos. Epidemic spreading in real networks: An eigenvalue viewpoint. In *Reliable Distributed Systems, 2003. Proceedings. 22nd International Symposium on*, pp. 25–34, 2003.
- 10) S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, Vol. 424, No. 4, pp. 175–308, 2006.
- 11) Y.Y. Liu, J.J. Slotine, and A.L. Barabási. Controllability of complex networks. *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 167–173, 2011.

- 12) M.E.J. Newman, A.L. Barabasi, and D.J. Watts. *The structure and dynamics of networks*. Princeton Univ Pr, 2006.
- 13) Baruch Barzel and Albert-László Barabási. Network link prediction by global silencing of indirect correlations. *Nature Biotechnology*, Vol. 31, No. 8, pp. 1–8, 2013.
- 14) Anthony Bonato and Yanhua Tian. Complex networks and social networks. In *Advances in Network Analysis and its Applications*, pp. 269–286. Springer, 2013.
- 15) Richard Durrett. *Random graph dynamics*, Vol. 20. Cambridge university press, 2007.
- 16) T. Nepusz and T. Vicsek. Controlling edge dynamics in complex networks. *Nature Physics*, Vol. 8, No. 7, pp. 568–573, 2012.
- 17) Yang-Yu Liu, Jean-Jacques Slotine, and Albert-László Barabási. Observability of complex systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 110, No. 7, pp. 2460–2465, 2013.
- 18) M. S. Granovetter. The strength of weak ties. *The American Journal of Sociology*, Vol. 78, No. 6, pp. 1360–1380, 1973.
- 19) S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, Vol. 1, pp. 61–67, May 1967.
- 20) P. S. Dodds, R. Muhamad, and D. J. Watts. An experimental study of search in global social networks. *Science*, Vol. 301, No. 5634, pp. 827–829, August 2003.
- 21) M. Dorigo and T. Stützle. *Ant Colony Optimization*. The MIT Press, 2004.
- 22) J. Kennedy and R. C. Eberhart. *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- 23) S. Kauffman. *At Home in the Universe: The Search for Laws of Self-Organization and Complexity*. Oxford University Press, October 1996. 米沢富美子 訳, 自己組織化と進化の論理, 日本経済新聞社, 1999.
- 24) 金子勝, 児玉龍彦. 逆システム学. 岩波書店, 2004.
- 25) D.J. Watts. *Six degrees: The science of a connected age*. WW Norton & Company, 2004.
- 26) J. Buck and E. Buck. Synchronous fireflies. *Scientific American*, Vol. 234, pp. 74–85, 1976.
- 27) C. S. Peskin. *Mathematical Aspects of Heart Physiology*. New York University, 1975.

- 28) N. Ikeda, S. Yoshizawa, and T. Sato. Difference equation model of ventricular parasystole as an interaction between cardiac pacemakers based on the phase response curve. *J. Theor. Biol.*, Vol. 103, No. 3, pp. 439–465, 1983.
- 29) Z. Neda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A. L. Barabasi. The sound of many hands clapping. *Nature*, Vol. 403, pp. 849–850, 2000.
- 30) Z. Neda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A. L. Barabasi. Physics of the rhythmic applause. *Physical Review E*, Vol. 61, pp. 6987–6992, 2000.
- 31) R R. Provine. Yawning. *American Scientist*, Vol. 93, pp. 532–539, 2005.
- 32) S. M. Platek, S. R. Critton, T. E. Myers, and G. G. Jr. Gallup. Contagious yawning: the role of self-awareness and mental state attribution. *Cognitive Brain Research*, Vol. 17, No. 2, pp. 223–227, July 2003.
- 33) J. Anderson, M. Myowa-Yamakoshi, and T. Matsuzawa. Contagious yawning in chimpanzees. *Biology Letters*, Vol. 271, pp. S468–S470, 2004.
- 34) B. S. Kerner and H. Rehborn. Experimental properties of phase transitions in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, No. 20, pp. 4030–4033, Nov 1997.
- 35) D Helbing and B.A. Huberman. Coherent moving states in highway traffic. *Nature*, Vol. 396, pp. 738–740, 1998.
- 36) Duncan J. Watts. *Small Worlds : The Dynamics of Networks between Order and Randomness (Princeton Studies in Complexity)*. Princeton University Press, November 2003.
- 37) M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts. Mean-field solution of the small-world network model. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, No. 14, pp. 3201–3204, Apr 2000.
- 38) A.L. Barabási and Z.N. Oltvai. Network biology: understanding the cell’s functional organization. *Nature Reviews Genetics*, Vol. 5, No. 2, pp. 101–113, 2004.
- 39) A. Barabási. *Linked: The New Science of Networks*. Perseus Books Group, May 2002.
- 40) P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, Vol. 38, No. 1, pp. 364–374, Jul 1988.
- 41) A.L. Barabasi. *Linked: How everything is connected to everything else and what it means*. Penguin Group New York, 2003.
- 42) B. Bollobas. *Random graphs*. Cambridge Univ Pr, 2001.

- 43) M.R. Murty. Ramanujan graphs. *JOURNAL-RAMANUJAN MATHEMATICAL SOCIETY*, Vol. 18, No. 1, pp. 33–52, 2003.
- 44) R. Olfati-Saber. Algebraic connectivity ratio of Ramanujan graphs. *Dartmouth College, Thayer School of Engineering, Tech. Rep*, 2006.
- 45) S. Kar, S. Aldosari, and JMF Moura. Topology for distributed inference on graphs. *IEEE Transactions on Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing]*, Vol. 56, No. 6, pp. 2609–2613, 2008.
- 46) R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 401–420, 2006.
- 47) Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, 1984.
- 48) M.D. LaMar and G.D. Smith. Effect of node-degree correlation on synchronization of identical pulse-coupled oscillators. *Physical Review E*, Vol. 81, No. 4, p. 046206, 2010.
- 49) C.C. Canavier and S. Achuthan. Pulse coupled oscillators and the phase resetting curve. *Mathematical biosciences*, Vol. 226, No. 2, pp. 77–96, 2010.
- 50) A. Díaz-Guilera, Conrad J. Pérez, and A. Arenas. Mechanisms of synchronization and pattern formation in a lattice of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, Vol. 57, No. 4, pp. 3820–3828, Apr 1998.
- 51) 吉野隆. Random geometric graph 上の結合振動子系のマクロな性質. 形の科学会誌, Vol. 20, No. 1, pp. 126–127, 2005.
- 52) N. Rubido, C. Cabeza, S. Kahan, GM Ramírez Ávila, and A.C. Marti. Synchronization regions of two pulse-coupled electronic piecewise linear oscillators. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, Vol. 62, No. 1, pp. 51–56, 2011.
- 53) S. H. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Phys. D*, Vol. 143, No. 1-4, pp. 1–20, 2000.
- 54) A. Jadbabaie, N. Moteshak, and M. Barahona. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators. In *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 5, pp. 4296–4301. Citeseer, 2004.
- 55) S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah. Gossip algorithms: Design, analysis and applications. In *IEEE INFOCOM*, Vol. 3, p. 1653. Citeseer, 2005.

- 56) S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah. Randomized gossip algorithms. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, Vol. 14, No. SI, p. 2530, 2006.
- 57) A.G. Dimakis, S. Kar, J.M.F. Moura, M.G. Rabbat, and A. Scaglione. Gossip algorithms for distributed signal processing. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 98, No. 11, pp. 1847–1864, 2010.
- 58) A.D. Sarwate and A.G. Dimakis. The impact of mobility on gossip algorithms. *Information Theory, IEEE Transactions on*, Vol. 58, No. 3, pp. 1731–1742, 2012.
- 59) T. Eren, W. Whiteley, A.S. Morse, P.N. Belhumeur, and B.D.O. Anderson. Sensor and network topologies of formations with direction, bearing and angle information between agents. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3064–3069. Cite-seer, 2003.
- 60) R. Rajagopal and M.J. Wainwright. Network-based consensus averaging with general noisy channels. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 59, No. 1, pp. 373–385, 2011.
- 61) R. Olfati-Saber and P. Jalalkamali. Coupled distributed estimation and control for mobile sensor networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, No. 10, pp. 2609–2614, 2012.
- 62) AJ Comber, CF Brunsdon, and CJQ Farmer. Community detection in spatial networks: Inferring land use from a planar graph of land cover objects. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, Vol. 18, pp. 274–282, 2012.
- 63) N.A. Lynch. *Distributed algorithms*. Morgan Kaufmann, 1996.
- 64) R. Olfati-Saber. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. In *IEEE conference on decision and control*, Vol. 44, p. 8179. Citeseer, 2005.
- 65) A.V. Savkin. Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of Vicsek’s model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 6, pp. 981–982, 2004.
- 66) J.R. Marden, G. Arslan, and J.S. Shamma. Cooperative control and potential games. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, Vol. 39, No. 6, pp. 1393–1407, 2009.
- 67) C. W. Wu. *Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems*. World Scientific, 2002.

- 68) Russell Merris. Laplacian graph eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 278, No. 1-3, pp. 221–236, July 1998.
- 69) Roger A. Horn and Charles A. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1985.
- 70) Fan R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, May 1994.
- 71) B. Mohar. Some applications of laplace eigenvalues of graphs. *Graph symmetry: Algebraic methods and applications*, Vol. 497, No. 22, p. 227, 1997.
- 72) 太田快人. システム制御のための数学 (1) -線形代数編-. コロナ社, 2000.
- 73) Mauricio Barahona. Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, Vol. 89, No. 5, p. 054101, 2002.
- 74) L. Donetti, P. I. Hurtado, and M. A. Munoz. Entangled networks, synchronization and optimal network topology, Oct 2005.
- 75) V. Tejedor, O. Bénichou, and R. Voituriez. Global mean first-passage times of random walks on complex networks. *Physical Review E*, Vol. 80, No. 6, p. 065104, 2009.
- 76) R. Sinatra, J. Gómez-Gardeñes, R. Lambiotte, V. Nicosia, and V. Latora. Maximal-entropy random walks in complex networks with limited information. *Physical Review E*, Vol. 83, No. 3, p. 030103, 2011.
- 77) M. Starnini, A. Baronchelli, A. Barrat, and R. Pastor-Satorras. Random walks on temporal networks. *Physical Review E*, Vol. 85, No. 5, p. 056115, 2012.
- 78) H. Sato, O. Isao, and K. Shigenobu. A new generation alternation model of genetic algorithms and its assessment. *Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence*, Vol. 12, No. 5, pp. 734–744, 1997.
- 79) E. Goldberg David. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. *Reprinted with corrections from Goldberg (1989) Addison Wesley Longman Inc*, 1993.
- 80) D.H. Ackley. An empirical study of bit vector function optimization. *Genetic algorithms and simulated annealing*, Vol. 1, pp. 170–204, 1987.
- 81) G. Sywerda. Uniform crossover in genetic algorithms. In *Proceedings of the third international conference on Genetic algorithms table of contents*, pp. 2–9. Morgan Kaufmann Publishers Inc. San Francisco, CA, USA, 1989.

- 82) L.J. Eshelman. The CHC adaptive search algorithm: How to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination. *Foundations of genetic algorithms*, Vol. 1, pp. 265–283, 1991.
- 83) D. Thierens. an integrated selection recombination GA. In *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Evolutionary Computation*, pp. 508–5512, 1994.
- 84) 花田良子, 佐藤史隆, 廣安知之, 三木光範, 鈴木泰博. 遺伝的アルゴリズムによるネットワーク特性量に着目したネットワーク設計法 (特集ネットワークが創発する知能). コンピュータソフトウェア, Vol. 24, No. 1, pp. 91–100, 2007.
- 85) R. Kumar and N. Banerjee. Multicriteria network design using evolutionary algorithm. *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 2179–2190, 2003.
- 86) 鴫崎和宏, 近藤久. ネットワーク特性量を用いた多目的 ga による複雑ネットワーク生成 (ネットワーク). 情報処理学会研究報告 ICS 知能と複雑系, Vol. 61, pp. 33–40, 2008.
- 87) 土屋裕一, 鈴木麗璽, 有田隆也. 最適化に基づく複雑ネットワークの指標の理解. JSAI 全国大会, 2009.
- 88) S. H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, Vol. 410, No. 6825, pp. 268–276, March 2001.
- 89) Stuart A. Kauffman. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. Oxford University Press, May 1993.
- 90) P. Hovareshti and J. Baras. Consensus problems on small world graphs: A structural study. Technical report, Institute for Systems Research, Oct 2006.
- 91) R. Olfati-Saber. Ultrafast consensus in small-world networks. In *Proceedings Proc. of American Control Conference*, pp. 2371–2378, 2005.
- 92) L. Donetti, F. Neri, and M.A. Muñoz. Optimal network topologies: Expanders, Cages, Ramanujan graphs, Entangled networks and all that. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, Vol. 2006, p. P08007, 2006.
- 93) S. Kar, J.M.F. Moura, and K. Ramanan. Distributed parameter estimation in sensor networks: Nonlinear observation models and imperfect communication. *Information Theory, IEEE Transactions on*, Vol. 58, No. 6, pp. 3575–3605, 2012.
- 94) A. Jadbabaie, J. Lin, and A.S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 48, No. 6, pp. 988–1001, 2003.

- 95) V. Quera, F.S. Beltran, and R. Dolado. Flocking behaviour: agent-based simulation and hierarchical leadership. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Vol. 13, No. 2, p. 8, 2010.
- 96) W. Ren and R. W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, 2008.
- 97) G. Ferrari-Trecate, L. Galbusera, M.P.E. Marciandi, and R. Scattolini. Model predictive control schemes for consensus in multi-agent systems with single-and double-integrator dynamics. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 54, No. 11, pp. 2560–2572, 2009.
- 98) 村山暢, 長野明紀, 羅志偉. 通信範囲制約を考慮するネットワーク群ロボットシステムの分散制御手法. システム制御情報学会論文誌, Vol. 25, No. 9, pp. 239–246, 2012.
- 99) F. Pasqualetti, A. Bicchi, and F. Bullo. Consensus computation in unreliable networks: A system theoretic approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 57, No. 1, pp. 90–104, 2012.
- 100) F. Radicchi, J.J. Ramasco, and S. Fortunato. Information filtering in complex weighted networks. *Physical Review E*, Vol. 83, No. 4, p. 046101, 2011.
- 101) X. Lou and J.A.K. Suykens. Finding communities in weighted networks through synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, Vol. 21, No. 4, pp. 043116–043116, 2011.
- 102) S. Pajevic and D. Plenz. The organization of strong links in complex networks. *Nature Physics*, Vol. 8, No. 5, pp. 429–436, 2012.
- 103) L. Bennett, S. Liu, G.P. LAZAROS, and S. Tsoka. Detection of disjoint and overlapping modules in weighted complex networks. *Advances in Complex Systems*, Vol. 15, No. 05, 2012.
- 104) L. Li, D. Alderson, W. Willinger, and J. Doyle. A first-principles approach to understanding the internet’s router-level topology. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 3–14, 2004.
- 105) J. Balthrop, S. Forrest, MEJ Newman, and M.M. Williamson. COMPUTER SCIENCE: Technological Networks and the Spread of Computer Viruses. *Science*, Vol. 304, No. 5670, p. 527, 2004.
- 106) M. Vidal, M.E. Cusick, and A.L. Barabasi. Interactome networks and human disease. *Cell*, Vol. 144, No. 6, pp. 986–998, 2011.



- 107) Samir Suweis, Filippo Simini, Jayanth R Banavar, and Amos Maritan. Emergence of structural and dynamical properties of ecological mutualistic networks. *Nature*, Vol. 500, No. 7463, pp. 449–452, 2013.
- 108) J. Gao, S.V. Buldyrev, H.E. Stanley, and S. Havlin. Networks formed from interdependent networks. *Nature Physics*, Vol. 8, No. 1, pp. 40–48, 2011.
- 109) C.P. Broedersz, X. Mao, T.C. Lubensky, and F.C. MacKintosh. Criticality and isostaticity in fibre networks. *Nature Physics*, 2011.
- 110) A.H. Dekker. Simulating network robustness for critical infrastructure networks. In *Proceedings of the Twenty-eighth Australasian conference on Computer Science-Volume 38*, pp. 59–67. Australian Computer Society, Inc. Darlinghurst, Australia, Australia, 2005.
- 111) M. Kitsak, L.K. Gallos, S. Havlin, F. Liljeros, L. Muchnik, H.E. Stanley, and H.A. Makse. Identification of influential spreaders in complex networks. *Nature Physics*, Vol. 6, No. 11, pp. 888–893, 2010.
- 112) S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.U. Hwang. Complex networks: structure and dynamics. *Physics Reports*, Vol. 424, No. 4-5, pp. 175–308, 2006.
- 113) Rick Durrett. *Random Graph Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- 114) MEJ Newman. Communities, modules and large-scale structure in networks. *Nature Physics*, Vol. 8, No. 1, pp. 25–31, 2011.
- 115) A.H. Dekker. Network Effects in Epidemiology. In *Proceedings of 2008 SimTecT conference*, 2008.
- 116) A.L. Barabási, N. Gulbahce, and J. Loscalzo. Network medicine: a network-based approach to human disease. *Nature Reviews Genetics*, Vol. 12, No. 1, pp. 56–68, 2011.
- 117) M. Nekovee, Y. Moreno, G. Bianconi, and M. Marsili. Theory of rumour spreading in complex social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 374, No. 1, pp. 457–470, 2007.
- 118) A. Vespignani. Modelling dynamical processes in complex socio-technical systems. *Nature Physics*, Vol. 8, No. 1, pp. 32–39, 2011.
- 119) Hiroshi Sato Seung-young Shin and Akira Namatame. Evolutionary Optimized Networks. In *Joint 4th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 9th International Symposium on advanced Intelligent Systems Nagoya - Japan*, 2008.

- 120) M.J. Keeling and P. Rohani. *Modeling infectious diseases in humans and animals*. Princeton University Press, 2011.
- 121) Ashish Raj, Amy Kuceyeski, and Michael Weiner. A network diffusion model of disease progression in dementia. *Neuron*, Vol. 73, No. 6, pp. 1204–1215, 2012.
- 122) Ed Bullmore and Olaf Sporns. The economy of brain network organization. *Nature Reviews Neuroscience*, Vol. 13, No. 5, pp. 336–349, 2012.
- 123) Nicholas J McCullen, Alastair M Rucklidge, Catherine SE Bale, Tim J Foxon, and William F Gale. Multiparameter models of innovation diffusion on complex networks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 12, No. 1, pp. 515–532, 2013.
- 124) Sandro Meloni, Alex Arenas, Sergio Gómez, Javier Borge-Holthoefer, and Yamir Moreno. Modeling epidemic spreading in complex networks: Concurrency and traffic. In *Handbook of Optimization in Complex Networks*, pp. 435–462. Springer, 2012.
- 125) Guanghu Zhu, Xinchu Fu, and Guanrong Chen. Spreading dynamics and global stability of a generalized epidemic model on complex heterogeneous networks. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 12, pp. 5808–5817, 2012.
- 126) Albert-László Barabási. Scale-free networks: a decade and beyond. *Science*, Vol. 325, No. 5939, pp. 412–413, 2009.
- 127) Bimal Kumar Mishra and Navnit Jha. Seiqrs model for the transmission of malicious objects in computer network. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 3, pp. 710–715, 2010.
- 128) Lu-Xing Yang, Xiaofan Yang, Jiming Liu, Qingyi Zhu, and Chenquan Gan. Epidemics of computer viruses: A complex-network approach. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, No. 16, pp. 8705–8717, 2013.

# 研究成果

## 学術論文誌

- Toshihiko Yamamoto, Hiroshi Sato, Akira Namatame  
*Evolutionary Optimized Consensus and Synchronization Networks*  
International Journal of Bio-Inspired Computation, Vol. 3, No.3(2011),pp.187-197.
- 山本聡彦, 小松孝紀, 生天目章  
進化手法による最適ネットワークの生成  
日本ソフトウェア科学会論文誌コンピュータソフトウェア, Vol.28, No.1(2011),pp.26-33.

## 査読付国際会議

- Toshihiko Yamamoto, Akira Namatame  
*Evolutionary Optimized Networks for Consensus and Synchronization*  
The 2010 International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA2010)  
in conjunction with 2nd International Workshop on Collective Evolutionary Systems(IWCES-  
10), Lecture Notes in Computer Science Springer(2010), Volume 6019/2010,pp.321-335.
- Toshihiko Yamamoto, Hiroshi Sato, Akira Namatame  
*Evolutionary Optimized Consensus and Synchronization Networks*  
Proceedings of the 13th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems  
2009(IES '09),8Pages(in CD-ROM).
- Toshihiko Yamamoto, Akira Namatame, Hiroshi Sato  
*Evolutionary Optimized Diffusion Networks*  
Proceedings of the 9th Asia-Pacific Complex Systems Conference 2009(Complex'09),pp.155-  
162.

- Toshihiko Yamamoto, Akira Namatame

*The Design of Optimal Diffusion Networks*

Proceedings of International Conference on Economic Science with Heterogeneous Inter-acting Agents 2009(ESHIA2009),10Pages(ID14).

## 国内研究会

- 山本聡彦, 生天目章, 佐藤浩

進化手法による最適ネットワークの生成 最適な同期ネットワーク設計

日本ソフトウェア科学会「マルチエージェントと協調計算」研究会 (MACC), 電子情報通信学会「人工知能と知識処理」研究会 (SIG-AI), 情報処理学会「知能と複雑系」研究会 (SIG-ICS), 人工知能学会「知識ベースシステム」研究会 (SIG-KBS) 協催合同エージェントワークショップ&シンポジウム 2009 (JAWS-2009), 講演論文集 8Pages(in USB flash drive).

- 山本聡彦, 佐藤浩, 生天目章

遺伝的ネットワークによる複雑ネットワークの発見

人工知能学会 進化計算フロンティア研究会 (SIG-ECF),3Pages(p2-5).

- 山本聡彦, 生天目章

進化手法による最適同期ネットワークの設計

情報処理学会 第75回「数理モデル化と問題解決研究会」情報処理学会研究報告,MPS, 数理モデル化と問題解決研究報告 2009-MPS-75(10),pp.1-9.

- 山本聡彦, 生天目章, 佐藤浩

進化手法による最適ネットワークの生成 最適な伝播拡散ネットワーク

日本ソフトウェア科学会 ネットワークが創発する知能研究会 (JWEIN09), 講演論文集 8Pages(in USB flash drive).

## その他の論文

### 査読付国際会議

- Toshihiko Yamamoto, Akira Namatame

*Networked Consensus Agents Dynamics through Matrix Eigenvalue*

Proceedings of the Sixth International Workshop on Agent-based Approaches in Economic and Social Complex Systems 2009(AESCS '09),pp.32-43.

### 国内研究会

- 山本聡彦, 生天目章, 佐藤浩

群れ行動特性に基づくマルチエージェント戦闘モデル

電子情報通信学会「人工知能と知識処理」研究会 (SIG-AI), 情報処理学会「知能と複雑系」研究会 (SIG-ICS) (第 154 回), 人工知能学会「知識ベースシステム」研究会 (SIG-KBS) 共催研究会, 情報処理学会研究報告, ICS, 知能と複雑系, 2009(16), pp.17-22.